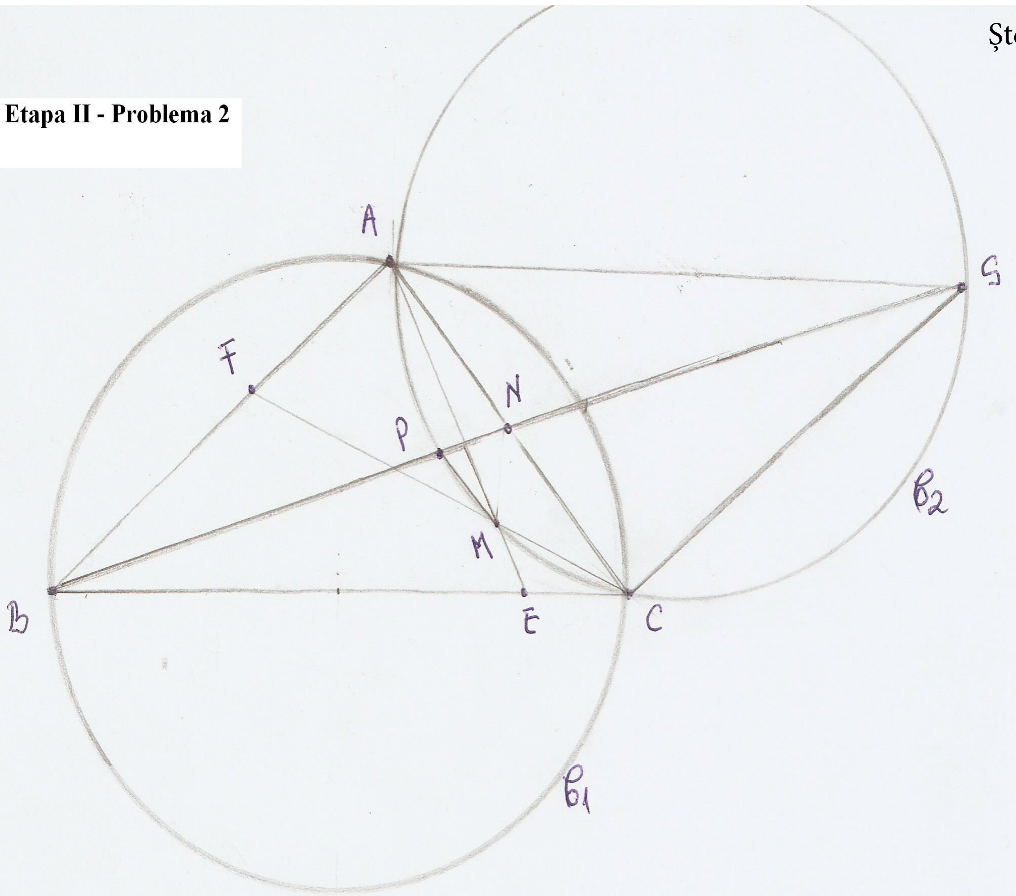
Ștefan Obada

Etapa II - Problema 2



$\hat{B} + \widehat{AMC} = 180^\circ$; $AM \cap BC = \{E\}$; $CM \cap BA = \{F\}$

Fie · $\mathcal{C}_1$ cercul circumscris $\triangle ABC$

· $\mathcal{C}_2 = sim_{AC}\, \mathcal{C}_1$

· $N =$ mij AC

· $BN \cap \mathcal{C}_2 = \{P\}$

· $S = sim_N\, B$.

Vom demonstra că P este punctul fix căutat.

• Demonstrăm că $M \in \mathcal{C}_2$.

$$\widehat{AMC} = \frac{1}{2}(360^\circ - \widehat{AC}_{\mathcal{C}_1}) = \frac{1}{2}\widehat{ABC}_{\mathcal{C}_1} = \frac{1}{2}\widehat{AC}_{\mathcal{C}_2} \Rightarrow M \in \mathcal{C}_2.$$

M se poate mișca pe semicercul determinat de $\mathcal{C}_2$ și Int. $\triangle ABC$.

• Demonstrăm că P este punct fix.

$$\left.\begin{array}{l} BN = \text{mediană (fixă)} \\ \mathcal{C}_2 = sim_{AC}\, \mathcal{C}_1 \text{ (fix)} \\ P = BN \cap \mathcal{C}_2 \end{array}\right| \Rightarrow P = \text{punct fix}.$$

• Rămâne de arătat că $P \in \mathcal{C}(BEF)$.

$$\left.\begin{array}{l}\widehat{AMC} = 180^\circ - \widehat{B} \\ \widehat{FME} = \widehat{AMC}\end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{FME} + \widehat{B} = 180^\circ \Rightarrow BMEF \text{ inscriptibil}.$$

Deci, $P \in \mathcal{C}(BEF) \Leftrightarrow P \in \mathcal{C}(BME) \Leftrightarrow$ BEMP inscriptibil.

$$\left.\begin{array}{l}S = sim_N B \\ \mathcal{C}_2 = sim_{AC} \mathcal{C}_1 \\ N = mij\, AC\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} S \in \mathcal{C}_2 \Rightarrow (APMS) \text{ inscriptibil} \Rightarrow \widehat{ASB} \equiv \widehat{AMP} \\ BCSM \text{ paralelogram} \Rightarrow \widehat{SBC} \equiv \widehat{ASB}\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l}\widehat{AMP} \equiv \widehat{SBC} \\ \widehat{AMP} \equiv 180^\circ - \widehat{PME}\end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{SBC} + \widehat{PME} = 180^\circ \Rightarrow \text{BEMP inscriptibil}.$$

(în cazul în care M este mai sus de P se va arăta în mod analog că (BFMP) este inscriptibil).

În concluzie, punctul fix prin care trece cercul circumscris ΔBEF este $\boxed{P}$, intersecția medianei din B cu cercul simetric cercului circumscris ΔABC față de AC.