

Problema 2. Se consideră fracțiile $\frac{a}{b}$, cu $a \neq 0$, $b \neq 0$ și $a + b = 2023$.
Câte dintre aceste fracții reprezintă numere naturale?

* * *

Soluție: Dacă $\frac{a}{b}$ este număr natural, atunci b divide pe a și $b \leq a$.

Avem $a = b \cdot k$, unde k este număr natural.

Cu aceasta, relația $a + b = 2023$ devine $b \cdot k + b = 2023$ sau $b(k + 1) = 2023$, de unde concluzia că b este un divizor al numărului 2023.

Așadar $b \in D_{2023} = \{1, 7, 17, 119, 289, 2023\}$

Din $b \leq a$ obținem $2b \leq a + b$, adică $2b \leq 2023$, de unde $b \leq 1011$.

În concluzie $b \in \{1, 7, 17, 119, 289\}$ și deci sunt 5 fracții care reprezintă numere naturale.

Obținem fracțiile $\frac{2022}{1}$, $\frac{2016}{7}$, $\frac{2006}{17}$, $\frac{1904}{119}$, $\frac{1734}{289}$.