Problema 4. Determinaţi numerele $\overline{abc}$ divizibile cu 19 pentru care $9a - 7b + c$ se divide cu 19.

* * *

Soluţie Dacă $19 \mid \overline{abc}$, atunci $19 \mid 100a + 10b + c$ sau $19 \mid 95a + 5a + 10b + c$.

Cum $19 \mid 95a$ rămâne ca $19 \mid 5a+10b+c$. De aici $19 \mid 10a+20b+2c$ sau $19 \mid 10a + b + 2c$.

Din $19 \mid 10a + b + 2c$ şi $19 \mid 9a - 7b + c$ obţinem $19 \mid 19a - 6b + 3c$.

Cum $19 \mid 19a$ rămâne ca $19 \mid 3(c - 2b)$.

Cum $19 \nmid 3$ abţinem $19 \mid c - 2b$. Deoarece $c - 2b \leq 9$ deducem că $c - 2b = 0$, adică $c = 2b$.

Acum, $19 \mid 9a - 7b + c$ devine $19 \mid 9a - 5b$ sau $9a - 5b = 19k$, unde k este număr întreg.

De aici $9a = 19k + 5b$. (1)

Din $c = 2b$ rezultă $b \leq 4$.

Din $9 \leq 9a \leq 81$ obţinem $9 \leq 19k + 5b \leq 81$. (2)

Pentru $b = 4$, (2) devine $9 \leq 19k + 20 \leq 81$, de unde $0 \leq k \leq 3$.

Înlocuind k şi b în (1) obţinem $9a \in \{20, 39, 58, 77\}$ şi nu există a natural.

Pentru $b = 3$, (2) devine $9 \leq 19k + 15 \leq 81$, de unde $0 \leq k \leq 3$.

Înlocuind k şi b în (1) obţinem $9a \in \{15, 34, 53, 72\}$, de unde $a = 8$. Obţinem numărul 836.

Pentru $b = 2$, (2) devine $9 \leq 19k + 10 \leq 81$, de unde $0 \leq k \leq 3$.

Înlocuind k şi b în (1) obţinem $9a \in \{10, 29, 48, 67\}$ şi nu există a natural.

Pentru $b = 1$, (2) devine $9 \leq 19k + 5 \leq 81$, de unde $1 \leq k \leq 4$.

Înlocuind k şi b în (1) obţinem $9a \in \{24, 43, 62, 81\}$, de unde $a = 9$. Obţinem numărul 912.

Pentru $b = 0$, (2) devine $9 \leq 19k \leq 81$, de unde $1 \leq k \leq 4$.

Înlocuind k şi b în (1) obţinem $9a \in \{19, 38, 57, 76\}$ şi nu există a natural.