Problema 2

Se consideră numerele reale pozitive x, y, z. Demonstraţi inegalitatea:

$$xy(x+y)+yz(y+z)+zx(z+x)\le 3\cdot\sqrt{\frac{(x^2+y^2)(y^2+z^2)(z^2+x^2)}{2}}.$$

SOLUŢIE:

Mai întâi, prelucrând membrul stâng şi aplicând inegalitatea dintre media aritmetică şi cea pătratică, avem:

$$xy(x+y)+yz(y+z)+zx(z+x)=x^2(y+z)+y^2(z+x)+z^2(x+y)\le$$

$$\le x^2\sqrt{2(y^2+z^2)}+y^2\sqrt{2(z^2+x^2)}+z^2\sqrt{2(x^2+y^2)}$$

deci trebuie să demonstrăm că

$$x^2\sqrt{2(y^2+z^2)}+y^2\sqrt{2(z^2+x^2)}+z^2\sqrt{2(x^2+y^2)}\le 3\cdot\sqrt{\frac{(x^2+y^2)(y^2+z^2)(z^2+x^2)}{2}}$$

Dar aceasta, împărţind prin $\sqrt{(x^2+y^2)(y^2+z^2)(z^2+x^2)}$ se scrie echivalent

$$\frac{x^2}{\sqrt{(x^2+y^2)(x^2+z^2)}}+\frac{y^2}{\sqrt{(y^2+z^2)(y^2+x^2)}}+\frac{z^2}{\sqrt{(z^2+x^2)(z^2+y^2)}}\le\frac{3}{2}$$

sau $$\sum\sqrt{\frac{x^2}{x^2+y^2}\cdot\frac{x^2}{x^2+z^2}}\le\frac{3}{2}.$$

Aplicând acum inegalitatea dintre media geometrică şi cea aritmetică avem:

$$\sum\sqrt{\frac{x^2}{x^2+y^2}\cdot\frac{x^2}{x^2+z^2}}\le\sum\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{x^2}{x^2+z^2}\right)=\frac{3}{2}$$

ceea ce trebuie demonstrat. Egalitatea se atinge dacă şi numai dacă $x=y=z$.