Determinaţi numerele întregi a şi b pentru care $\frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{3}{ab}=4$.

Adriana şi Lucian Dragomir, Revista RMCS, nr. 26 (2008)

Soluţie. Fie a şi b numere întregi care verifică relaţia din enunţ. Evident a şi b trebuie să fie nenule. Eliminând numitorii, se ajunge la $(4b-2)a=b+3$. Deoarece $4b-2\neq 0$ pentru $b\in\mathbb{Z}$, rezultă că $a=\frac{b+3}{4b-2}$, deci este necesar ca $4b-2$ să dividă $b+3$. Atunci $4b-2$ divide $4b+12$ şi $4b-2$, deci şi pe 14. Aşadar $4b-2\in\{-14,\ -2,\ 2,\ 14\}$ (am enumerat divizorii lui 14 care dau rest 2 la împărţirea cu 4). Găsim că $b\in\{-3,\ 0,\ 1,\ 4\}$.
Dacă $b=-3$ rezultă $a=0$ ceea ce nu convine.
Cazul $b=0$ nu convine.
Pentru $b=1$ rezultă $a=2$, numere despre care se verifică imediat că satisfac relaţia dată.
Pentru $b=4$ găsim $a=\frac{1}{2}\notin\mathbb{Z}$ care nu convine.
Aşadar singurele numere care verifică relaţia dată sunt $a=2$, $b=1$.