Problema 3.

Există numere iraționale algebrice α (soluție a unei ecuații de tipul $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0 = 0$, cu $a_k \in \mathbb{Z}, a_n \neq 0$), cu proprietatea că $\alpha^k \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}, \forall k \in \mathbb{N}^*$?

Soluție problema 3.

Autor: **Cristian Vîntur**

Raspunsul este afirmativ, numarul $\sqrt{2}+1$ satisfacand proprietatea ceruta.

Intradevar, numarul $\sqrt{2}+1$ este una dintre solutiile ecuatiei $x^2-2x-1=0$, deci este numar algebric.

Utilizand binomul lui Newton obtinem:

$$\left(\sqrt{2}+1\right)^n = \binom{n}{0}\sqrt{2}^{n-1} + \binom{n}{1}\sqrt{2}^{n-2} + \binom{n}{2}\sqrt{2}^{n-3} + \cdots + \binom{n}{n-1}\sqrt{2} + \binom{n}{n}$$

Se obtine faptul ca $\left(\sqrt{2}+1\right)^n$ este de forma $a\sqrt{2}+b$, unde a si b sunt numere intregi (a si b sunt sume avand termeni de forma $\binom{n}{i}$, $0 \leq i \leq n$). Evident ca $\left(\sqrt{2}+1\right)^n$ este irational pentru orice n.

Rezulta ca $\sqrt{2}+1$ satisface proprietatea ceruta in enunt, deci raspunsul este afirmativ.

Am notat cu $\binom{n}{k}$ - combinari de n luate cate k.