P4. Calculaţi limita
$$\lim_{n\to\infty} n\cdot\left(e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right).$$

S. Se ştie că pentru $\alpha>0$ şirul $\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\alpha}\right)_{n\geq 1}$ este strict crescător începând cu un anumit rang $n_\alpha\in\mathbb{N}^*$ dacă $\alpha<\frac{1}{2}$, respectiv strict descrescător începând cu un anumit rang $n_\alpha\in\mathbb{N}^*$ dacă $\alpha\geq\frac{1}{2}$.
Fie $\alpha\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$ oarecare şi $n\geq n_\alpha$. Atunci
$$n\cdot\left(e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)>n\cdot\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\alpha}-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cdot\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^\alpha-1}{\frac{1}{n}}.$$
Rezultă că
$$\liminf n\cdot\left(e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)\geq\lim_{n\longrightarrow\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cdot\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^\alpha-1}{\frac{1}{n}}=e\cdot\alpha.$$
Cum inegalitatea de mai sus are loc pentru orice $\alpha\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$, obţinem că $\liminf n\cdot\left(e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)\geq\frac{e}{2}\quad(1)$.
Cum şirul $\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}\right)_{n\geq 1}$ este strict descrescător începând cu un rang n_0, rezultă că pentru orice $n\geq n_0$ avem
$$n\cdot\left(e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)<n\cdot\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cdot\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}}-1}{\frac{1}{n}}.$$
Obţinem că
$$\limsup n\cdot\left(e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)\leq\lim_{n\longrightarrow\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cdot\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}}-1}{\frac{1}{n}}=\frac{e}{2}\quad(2).$$
Din (1) şi (2) rezultă atunci că
$$\lim_{n\longrightarrow\infty} n\cdot\left(e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)=\frac{e}{2}.$$