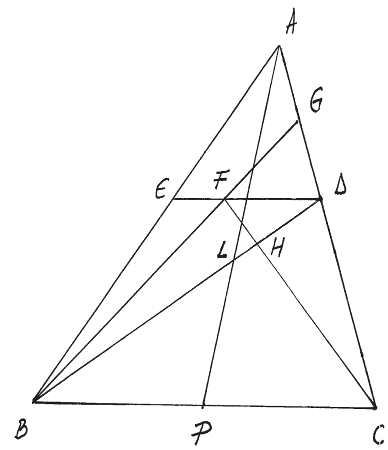
Problema 1. **Fie figura de mai jos în care avem următoarele relaţii:** $ED \| BC$, $\{F\} \in ED$ **astfel încât** $[EF] = [ED]/3$; $BF \cap AD = \{G\}$ **astfel încât** $[AG] \equiv [GD]$; $\{P\} \in [BC]$ **astfel încât** $[BP] \equiv [PC]$ **şi** $AP \cap BD = \{L\}$; $\{H\} = BD \cap CF$.



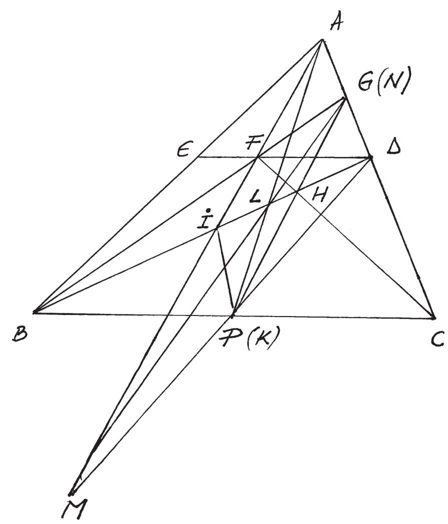
Să se demonstreze că:

1) $\dfrac{FH}{HC} = \dfrac{AG}{GC}$.

2) Dreptele AF, GL, DP **sunt concurente.**

Demonstraţie

În înţelegerea demonstraţiei expuse vom folosi următoarea figură



1) Luăm triunghiul ABD. Deoarece AG este mediană (ip.) şi $[EF] = [ED]/3$ (ip.), ţinând cont de faptul că centrul de greutate al unui triunghi se află, pe fiecare mediană, la o treime de bază şi două treimi de vârf, deducem că F este centrul de greutate al triunghiului ABD, de unde AF şi ED sunt mediane.

Dacă notăm $AF \cap BD = \{I\} \Rightarrow BI \equiv ID$.

În ΔBGC avem $FD(= BD) \| BC$ (ip.), de unde rezultă $\dfrac{BF}{FG} = \dfrac{CD}{DG}$ (1).

Dacă notăm $\{K\} = GH \cap BC$, aplicând teorema lui Ceva, pentru cevienele BD, CF, GK, obţinem $\dfrac{FG}{FB} \cdot \dfrac{DG}{DC} \cdot \dfrac{KC}{KB} = 1$ (2).

Înlocuind (1) în (2) vom obţine $\dfrac{KC}{KB} = 1$, adică GK este mediană şi mai mult că $\{P\} = \{K\}$.

Asta ne spune că IK este linie mijlocie în ΔBDC, de unde rezultă $IK \| DC(= AD)$ şi $[IK] = [DC]/2$.

Cum ED este mediană în ΔABD şi $ED \| BC$ (ip.) rezultă ED este linie mijlocie în ΔABC, iar de aici avem

$$[AD] \equiv [DC] \Rightarrow [IK] = [DC]/2 = [AD]/2 = [AG].$$

Cum $[IK] \equiv [AG]$ şi $IK \| AG(= DC)$, rezultă $AIKG$ este paralelogram, de unde $AI \| KG \Leftrightarrow AF \| GH \Rightarrow$ aplicând teorema lui Thales în ΔACF: $\dfrac{FH}{HC} = \dfrac{AG}{GC}$.

2) Fie $AI \cap KD(= DP) = \{M\}$ şi $IL \cap AD = \{N\}$. În ΔAMD, aplicând teorema lui Ceva pentru cevienele AK, DI, MN, obţinem

$$\frac{IM}{IA} \cdot \frac{NA}{ND} \cdot \frac{KD}{KM} = 1.$$

Ţinând cont de faptul că $IK \| AD$ vom avea, prin aplicarea teoremei lui Thales, $\dfrac{MI}{IA} = \dfrac{MK}{KD} \Leftrightarrow \dfrac{IM}{IA} \cdot \dfrac{KD}{KM} = 1$. Înlocuind în relaţia lui Ceva, vom obţine $\dfrac{NA}{ND} = 1$, adică $\{N\ = \{G\}$ şi dreptele $MN = GL$.

Cum $AM = AF$, $MN = GL$ şi $MD = DK = DP$, rezultă dreptele AF, GL, DP sunt concurente (în punctul M).

$\square$