Problemă. Fie şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ cu termen general

$$a_n = \frac{1}{1\cdot 3} + \frac{2}{1\cdot 3\cdot 5} + \cdots + \frac{n}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n+1)}.$$

Determinaţi o formulă pentru a_n şi, apoi, calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

$* * *$

Soluţie. Notăm $a_n = \frac{1}{1\cdot 3} + \frac{2}{1\cdot 3\cdot 5} + \cdots + \frac{n}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n+1)} = \frac{b_n}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n+1)}$. Atunci $a_n = \frac{b_{n-1}}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)} + \frac{n}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n+1)} = \frac{(2n+1)b_{n-1}+n}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n+1)}$, ceea ce conduce la $b_n = (2n+1)b_{n-1} + n$.

Aceasta se scrie şi $2b_n + 1 = 2(2n+1)b_{n-1} + 2n + 1 = (2n+1)(2b_{n-1}+1)$. Iterat, $2b_n+1 = (2n+1)(2n-1)\cdots 3\cdot 1 = (2n+1)!!$, deci $b_n = \frac{1}{2}((2n+1)!! - 1)$, astfel $a_n = \frac{(2n+1)!!-1}{2\cdot(2n+1)!!} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\cdot(2n+1)!!}$. Prin urmare $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \dfrac{1}{2}$.

Cele de mai sus sugerează şi o altă metodă. Calculăm $a_n + \frac{1}{2\cdot(2n+1)!!}$; suma ultimilor doi termeni este $\frac{n}{(2n+1)!!} + \frac{1}{2\cdot(2n+1)!!} = \frac{2n+1}{2\cdot(2n+1)!!} = \frac{1}{2\cdot(2n-1)!!}$, şi totul se telescopează la $\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{2\cdot 3!!} = \frac{1}{2}$.

Soluţie Alternativă. Se poate verifica prin inducţie că

$$a_n = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{\pi}}{2^{n+2}\Gamma(n+3/2)},$$

unde Γ este funcţia Gamma a lui Euler (o generalizare a factorialului), folosind formula de recurenţă $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ şi faptul că $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.

Aşadar $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \dfrac{1}{2} - \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{\pi}}{2^{n+2}\Gamma(n+3/2)} = \dfrac{1}{2}$.