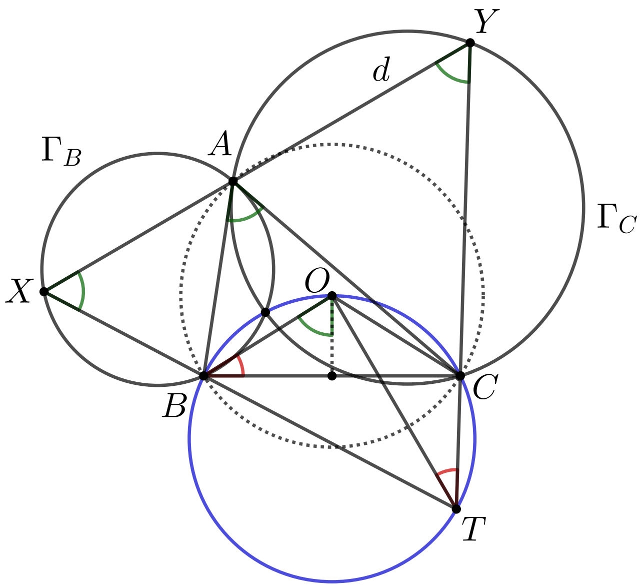
Problema 3. Fie ABC un triunghi ascuţitunghic şi O centrul cercului său circumscris. Considerăm cercul Γ_B care trece prin A şi B şi este tangent laturii $[AC]$, precum şi cercul Γ_C care trece prin A şi C şi este tangent laturii $[AB]$. O dreaptă d care trece prin A intersectează a doua oară cercurile Γ_B şi Γ_C în punctele X, respectiv Y. Demonstraţi că $OX = OY$.

baraj de juniori, Franţa

Soluţie:
Deoarece AC este tangentă cercului Γ_B, avem că $\sphericalangle AXB \equiv \sphericalangle BAC$ (ambele subîntind arcul AB al cercului Γ_B). Analog, $\sphericalangle AYC \equiv \sphericalangle BAC$, deci unghiurile $\sphericalangle AXB$ şi $\sphericalangle AYC$ sunt congruente şi ascuţite. Atunci există $\{T\} = BX \cap CY$ şi triunghiul XTY este isoscel. În plus, $m(\sphericalangle XTY) = 180^\circ - 2m(\sphericalangle A)$. Pe de altă parte, $m(\sphericalangle BOC) = 2m(\sphericalangle A)$, deci patrulaterul $OBTC$ este inscriptibil (are două unghiuri opuse suplementare). Rezultă că $m(\sphericalangle OTC) = m(\sphericalangle OBC) = 90^\circ - m(\sphericalangle A) = 90^\circ - m(\sphericalangle TYA)$, deci $TO \perp XY$. Aşadar punctul O se află pe înălţimea din T a triunghiului TXY, care este totodată şi mediatoarea segmentului $[XY]$, deci $OX = OY$.



Remarcă: Un simplu calcul de unghiuri arată că şi cel de-al doilea punct de intersecţie a cercurilor Γ_B şi Γ_C se găseşte pe cercul circumscris triunghiului OBC.