

Problema 3.

- a) Există triunghiuri în care toate sinusurile și cosinusurile celor trei unghiuri să fie numere iraționale?
 b) Să se demonstreze că dacă într-un triunghi sinusurile celor trei unghiuri sunt reprezentate de numere raționale, atunci și cosinusurile celor trei unghiuri sunt tot numere raționale.

Soluție. Răspunsul la prima întrebare este afirmativ. Unul din aceste triunghiuri este evident triunghiul isoscel cu un unghi de $\frac{3f}{4}$.

Pentru a doua întrebare, putem aplica teorema sinusului și teorema cosinusului. Astfel avem:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R \quad \text{și de aici}$$

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{4R^2(\sin^2 B + \sin^2 C - \sin^2 A)}{8R^2 \sin B \sin C} = \frac{\sin^2 B + \sin^2 C - \sin^2 A}{2 \sin B \sin C}.$$

Este evident că ultima fracție reprezintă un număr rațional.