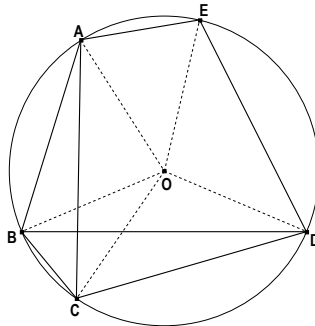


Etapa 6, Problema 1

Pentagonul convex $ABCDE$ este înscris în cercul de rază 1 și are diagonalele AC și BD perpendiculare. Determinați valoarea maximă a ariei unui astfel de pentagon.

Soluție.

Fie $m(\widehat{AB}) = x$, $m(\widehat{DE}) = y$, $m(\widehat{AE}) = z$; atunci $m(\widehat{CD}) = \pi - x$, $m(\widehat{BC}) = \pi - y - z$.



Aplicând de două ori inegalitatea lui Jensen, obținem:

$$\begin{aligned} A_{ABCDE} &= A_{OAB} + A_{OBC} + \dots + A_{OEA} = \\ &= \frac{1}{2} \sin x + \frac{1}{2} \sin(\pi - y - z) + \frac{1}{2} \sin(\pi - x) + \frac{1}{2} \sin y + \frac{1}{2} \sin z \\ &\leq \sin \frac{x + \pi - x}{2} + \frac{3}{2} \sin \frac{\pi - y - z + y + z}{3} = 1 + \frac{3\sqrt{3}}{4}, \end{aligned}$$

număr care reprezintă valoarea maximă cerută.

Acest maxim se atinge când $x = \pi - x$ și $y = z = \pi - y - z$, deci pentru $x = \frac{\pi}{2}$ și $y = z = \frac{\pi}{3}$. ■