

ETAPA 7

Numele și prenumele: CIOCOIU Alexandru Boris
 Colegiul „Național”, Iași

Problema 3. Dacă $\overline{a,b} \cdot \overline{c,d} \cdot \overline{e,f} = 1$ să se determine valoarea minimă și valoarea maximă a sumei $\overline{a,b} + \overline{c,d} + \overline{e,f}$.

* * *

Rezolvare:

Înmulțind în ambii membri ai egalității cu 1000, se poate scrie: $\overline{ab} \cdot \overline{cd} \cdot \overline{ef} = 1000$. Rezultă că numărul 1000 se poate descompune într-un produs de trei factori în care fiecare factor are exact una sau două cifre. Divizorii cu una sau două cifre ai numărului $1000 = 2^3 \times 5^3$ sunt: $\{1, 2, 4, 5, 8, 10, 20, 25, 40, 50\}$.

Ordonăm crescător cei trei factori, de exemplu $\overline{ab} \leq \overline{cd} \leq \overline{ef}$. Sunt posibile următoarele cazuri:

$$\overline{ab} = 1, \overline{cd} = 20, \overline{ef} = 50: \quad \overline{ab} + \overline{cd} + \overline{ef} = 71 \Rightarrow \overline{a,b} + \overline{c,d} + \overline{e,f} = 7,1$$

$$\overline{ab} = 1, \overline{cd} = 25, \overline{ef} = 40: \quad \overline{ab} + \overline{cd} + \overline{ef} = 66 \Rightarrow \overline{a,b} + \overline{c,d} + \overline{e,f} = 6,6$$

$$\overline{ab} = 2, \overline{cd} = 10, \overline{ef} = 50: \quad \overline{ab} + \overline{cd} + \overline{ef} = 62 \Rightarrow \overline{a,b} + \overline{c,d} + \overline{e,f} = 6,2$$

$$\overline{ab} = 2, \overline{cd} = 20, \overline{ef} = 25: \quad \overline{ab} + \overline{cd} + \overline{ef} = 47 \Rightarrow \overline{a,b} + \overline{c,d} + \overline{e,f} = 4,7$$

$$\overline{ab} = 4, \overline{cd} = 5, \overline{ef} = 50: \quad \overline{ab} + \overline{cd} + \overline{ef} = 59 \Rightarrow \overline{a,b} + \overline{c,d} + \overline{e,f} = 5,9$$

$$\overline{ab} = 4, \overline{cd} = 10, \overline{ef} = 25: \quad \overline{ab} + \overline{cd} + \overline{ef} = 39 \Rightarrow \overline{a,b} + \overline{c,d} + \overline{e,f} = 3,9$$

$$\overline{ab} = 5, \overline{cd} = 5, \overline{ef} = 40: \quad \overline{ab} + \overline{cd} + \overline{ef} = 50 \Rightarrow \overline{a,b} + \overline{c,d} + \overline{e,f} = 5$$

$$\overline{ab} = 5, \overline{cd} = 8, \overline{ef} = 25: \quad \overline{ab} + \overline{cd} + \overline{ef} = 38 \Rightarrow \overline{a,b} + \overline{c,d} + \overline{e,f} = 3,8$$

$$\overline{ab} = 5, \overline{cd} = 10, \overline{ef} = 20: \quad \overline{ab} + \overline{cd} + \overline{ef} = 35 \Rightarrow \overline{a,b} + \overline{c,d} + \overline{e,f} = 3,5$$

$$\overline{ab} = 10, \overline{cd} = 10, \overline{ef} = 10: \quad \overline{ab} + \overline{cd} + \overline{ef} = 30 \Rightarrow \overline{a,b} + \overline{c,d} + \overline{e,f} = 3$$

Valoarea minimă a sumei $\overline{a,b} + \overline{c,d} + \overline{e,f}$ este 3, iar valoarea maximă este 7,1.