Problema 2. Să se afle valorile lui n număr natural astfel încât dintre numerele 2^n, 3^n, 7^n şi 9^n să se poată alege trei astfel încât suma lor să fie divizibilă cu 5.

Mihai Bunget, Tg. Jiu

Soluţie: 3. Dacă $n = 0$, cele 4 puteri au valoarea 1 şi nu putem alege 3 dintre ele cu suma divizibilă cu 5.

Dacă $n = 4k+1$, unde k este număr natural nenul, atunci $u(2^n) = 2$, $u(3^n) = 3$, $u(7^n) = 7$, respectiv $u(9^n) = 9$. Suma oricăror trei nu este divizibilă cu 5, deci nu putem alege.

Dacă $n = 4k+2$, unde k este număr natural nenul, atunci $u(2^n) = 4$, $u(3^n) = 9$, $u(7^n) = 9$, respectiv $u(9^n) = 1$. Suma oricăror trei nu este divizibilă cu 5, deci nu putem alege.

Dacă $n = 4k+3$, unde k este număr natural nenul, atunci $u(2^n) = 8$, $u(3^n) = 7$, $u(7^n) = 3$, respectiv $u(9^n) = 9$. Avem $u(2^n + 3^n + 9^n) = u(8 + 3 + 9) = 0$, care este divizibilă cu 5.

Dacă $n = 4k$, unde k este număr natural nenul, atunci $u(2^n) = 6$, $u(3^n) = 1$, $u(7^n) = 1$, respectiv $u(9^n) = 1$. Suma oricăror trei nu este divizibilă cu 5, deci nu putem alege.

În concluzie, $n = 4k + 3$, unde k este număr natural nenul.