

Problema 4. Determinați două numere naturale x și y pentru care

$$x^2 + y^3 = 2025^{2023}$$

* * *

Soluție: Căutăm un număr natural A pentru care $b = 2025 - a^3$ este pătrat perfect.

Prin încercări găsim $a = 9$ și $b = 36$. Așadar, $36^2 + 9^3 = 2025$.

Acum

$$2025^{2023} = 2025 \cdot 2025^{2022} = (36^2 + 9^3) \cdot 2025^{2022} = 36^2 \cdot 2025^{2022} + 9^3 \cdot 2025^{2022} = (36 \cdot 2025^{1011})^2 + (9 \cdot 2025^{674})^3.$$

De aici deducem că $x = 36 \cdot 2025^{1011}$ și $y = 9 \cdot 2025^{674}$.