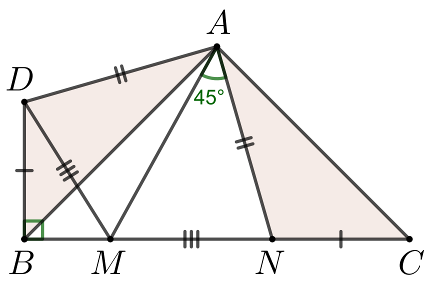
Problema 3. Fie ABC un triunghi dreptunghic isoscel şi M, N două puncte pe ipotenuza (BC) astfel ca $m(\sphericalangle MAN) = 45°$ şi $M \in (BN)$. Arătaţi că

$$BM^2 + CN^2 = MN^2.$$

Soluţia 1:
În exteriorul triunghiului ABC construim triunghiul ABD congruent cu triunghiul ACN. Atunci $BD = NC$, $m(\sphericalangle MBD) = m(\sphericalangle MBA)+m(\sphericalangle ABD) = m(\sphericalangle ABC)+m(\sphericalangle ACN) = 45° + 45° = 90°$. În plus, $m(\sphericalangle DAM) = m(\sphericalangle DAB) + m(\sphericalangle BAM) = m(\sphericalangle NAC) + m(\sphericalangle BAM) = m(\sphericalangle BAC) - m(\sphericalangle MAN) = 90° - 45° = 45° = m(\sphericalangle MAN)$. Având şi $DA = AN$, iar $[AM]$ fiind latură comună, triunghiurile DAM şi NAM sunt congruente (LUL). Deducem că $DM = MN$.
Scriind atunci teorema lui Pitagora în triunghiul MBD, obţinem $MN^2 = DM^2 = BM^2 + BD^2 = BM^2 + CN^2$, ceea ce trebuia demonstrat.



Soluţia 2:
Fie P simetricul lui B faţă de AM. Atunci triunghiurile AMB şi AMP sunt congruente. Rezultă că $AP = AB = AC$ şi $m(\sphericalangle PAN) = m(\sphericalangle MAN)-m(\sphericalangle MAP) = 45° - m(\sphericalangle BAM) = m(\sphericalangle NAC)$. Prin urmare, şi triunghiurile PAN şi CAN sunt congruente (LUL).
Din cele două congruenţe de triunghi rezultă că $m(\sphericalangle MPN) = m(\sphericalangle MPA) + m(\sphericalangle APN) = m(\sphericalangle MBA) + m(\sphericalangle NCA) = 90°$.
Atunci, din teorema lui Pitagora în triunghiul dreptunghic MPN rezultă că $MN^2 = MP^2 + NP^2 = MB^2 + CN^2$, ceea ce trebuia demonstrat.