Clasa a X-a, Gazeta Matematica nr. 3

27816. Fie p un număr prim şi n un număr natural, $n < p$. Arătaţi că $\frac{(np)!}{(p!)^n} - n!$ este divizibil cu p.

Felician Preda, Craiova

27817. Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia

$$\left(1 + x^{\frac{2}{x}}\right)^{\frac{x}{2}} = 3^{\log_2 x}.$$

Mihai Opincariu, Brad, Hunedoara

27818. Demonstraţi că pentru orice $x > 0$ are loc inegalitatea

$$\operatorname{arctg} x \cdot \operatorname{arctg} \frac{1}{x} \geqslant \frac{\pi^2}{8} \cdot \frac{x}{x^2+1}.$$

Neculai Stanciu, Buzău

S:L20.94. Fie $2n$ numere întregi diferite. Să se arate că există o ordonare $a_1, a_2, \ldots, a_{2n}$ a acestora, astfel încât

$$[(a_1 - a_2)(a_3 - a_4) \cdot \ldots \cdot (a_{2n-1} - a_{2n})] \vdots (n!).$$

* * *

S:L20.95. Rezolvaţi în mulţimea $(0, \infty)$ ecuaţia :

$$2^{2^{2^{(x^3-x^2-8x+12)}}} + x^2 + 2^{2^{(x^3-x^2-8x+12)}-1} = 4x + \frac{\log_2(4x - x^2)}{2}.$$

Dan Andrei Tudor, elev, Bucureşti

S:L20.96. Determinaţi mulţimea

$$M = \{\arcsin a + \arccos b \mid ab < 0, a^2 + b^2 = 1\}.$$

George Cazacu, Bucureşti

S:L20.97. Pentru $r > 0$, se consideră mulţimea

$$M = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1 \text{ şi } |z - 3i| = r\}.$$

Fie $A = \{r > 0 \mid M \text{ are un singur element}\}$. Să se determine S, suma elementelor mulţimii A.

Admitere Universitatea Politehnica din Bucureşti, 2019

S:L20.100. Două dintre vârfurile unui triunghi echilateral se mişcă în interiorul a două pătrate disjuncte, de latură $a > 0$. Ce figură descrie al treilea vârf?

G. Rene, Bucureşti