Coordonate triliniare

Popa Ioana

11 mai 2021

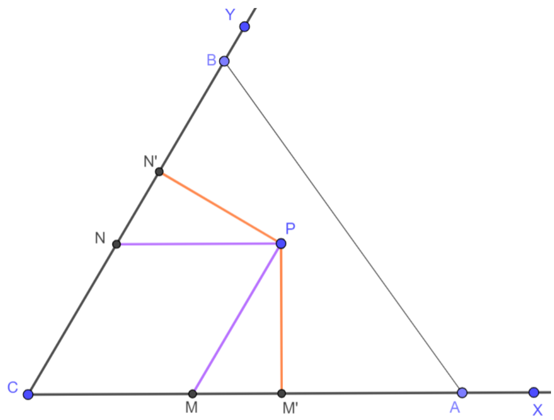
Rezumat

Coordonatele triliniare pot fi utilizate pentru a aborda în mod analitic problemele de geometrie. Această lecție prezintă câteva rezultate legate de coordonatele triliniare ale unor puncte importante din triunghi și probleme ce pot fi rezolvate folosind coordonatele triliniare.

Lecția se adresează claselor a IX-a și a X-a.

1 Trecerea de la sistemul cartezian la sistemul triliniar de coordonate

Într-un sistem oarecare de coordonate oblice, poziția unui punct P față de axele de coordonate CX și CY este determinată de lungimea a două segmente PM și PN, **paralele** cu CX și respectiv CY. Vom nota cu x și y coordonatele **oblice** ale punctului $P \Leftrightarrow x = PM$ și $y = PN$.



Este evident că poziția punctului va fi **la fel de bine determinată** dacă în locul distanțelor paralele alegem să considerăm coordonatele ca fiind distențele **perpendiculare** de la punctul P la cele două axe, respectiv PM' și PN'. Vom nota cu α și β coordonatele **perpendiculare** ale punctului $P \Leftrightarrow \alpha = PM'$ și $\beta = PN'$.

Orice pereche de coordonate oblice poate fi deci transformată într-o pereche echivalentă de coordonate perpendiculare.

Observație: Dacă sistemul de axe este dreptunghiular ($CX \perp CY$), atunci cele două sisteme de coordonate (cele oblice și cele perpendiculare) coincid.

Convenții de semn: Dacă segmentul determinat de punctul P și piciorul perpendicularei din P pe CX nu este inclus în semiplanul $[CX, Y)$, vom conveni ca acea coordonată să fie negativă.

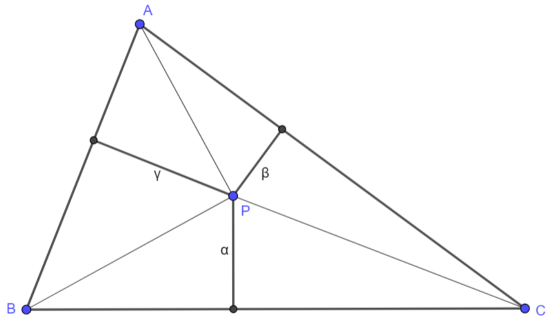
Exemple - Interpretarea unor ecuații simple în α și β:

- $\alpha = 0$: ecuația axei CX
- $\alpha = d$, unde d =constantă: ecuația dreptei paralele cu CX, aflată la o distanță d de aceasta
- $\alpha = \beta$: ecuația bisectoarei interioare a unghiului XCY
- $\alpha = -\beta$: ecuația bisectoarei exterioare a unghiului XCY

2 Punctul în coordonate triliniare

Vom considera 3 segmente fixe: BC, CA și AB ce determină un triunghi $\triangle ABC$ și P un punct în planul triunghiului.

Conform considerentelor anterioare, dacă distanțele **perpendiculare** de la punctul P la oricare două drepte fixe sunt cunoscute, atunci punctul este **determinat**. Aceste trei distanțe, notate cu α, β și γ ca în figură, sunt considerate *coordonatele triliniare exacte* ale punctului P (scriem $P = \alpha : \beta : \gamma$).



Extindere: Putem extinde noțiunea definită mai sus și să numim *coordonate triliniare* ale punctului P trei numere reale m, n, p (scriem $P = m : n : p$) direct proporționale cu coordonatele sale perpendiculare (i.e. distanțele de la P la laturile $\triangle ABC$) $\Leftrightarrow$ există $k \neq 0$ a.î.:

$$m = k \cdot d(P, BC),\ n = k \cdot d(P, AC),\ p = k \cdot d(P, AB) \tag{1}$$

Semn: Orice punct P aflat în interiorul triunghiului are toate coordonatele pozitive. Un punct P aflat în exteriorul triunghiului are una sau două coordonate negative.

2.1 Relație între coordonatele triliniare exacte

Dacă două dintre coordonatele triliniare exacte sunt cunoscute, cea de-a treia trebuie să poată fi calculată. Pentru aceasta, căutăm să obținem o relație între cele 3 coordonate.

Considerăm punctul P în interiorul triunghiului $\triangle ABC$ (având lungimile laturlior a, b, c), ca în figura de mai sus.

$$A_{\triangle ABC} = A_{\triangle APB} + A_{\triangle APC} + A_{\triangle BPC} \tag{2}$$

$$\Rightarrow 2 \cdot A_{\triangle ABC} = a \cdot \alpha + b \cdot \beta + c \cdot \gamma \tag{3}$$

Provoc cititorul să demonstreze că relația este adevărată și în cazul în care P este aflat în exteriorul triunghiului.

Ecuația (3) este importantă deoarece permite transformarea oricărei ecuații ce conține α, β și γ într-o ecuație *omogenă* [Whi66]. Întrucât $\frac{a\cdot\alpha+b\cdot\beta+c\cdot\gamma}{2A_{\triangle ABC}} = 1$, putem înmulți orice termen al unei ecuații cu fracția $\frac{a\cdot\alpha+b\cdot\beta+c\cdot\gamma}{2A_{\triangle ABC}}$, crescând astfel gradul termenului respectiv. Repetând această operație putem aduce toți termenii unei ecuații la același grad, transformând ecuația într-una omogenă.

Exemplu: Fie ecuația:

$$\alpha^3 + 3\alpha\beta + 5\beta = 1 \tag{4}$$

Putem aduce toți termenii ecuației la gradul 3, astfel:

$$\alpha^3 + 3\alpha\beta\frac{a\cdot\alpha+b\cdot\beta+c\cdot\gamma}{2A_{\triangle ABC}} + 5\beta(\frac{a\cdot\alpha+b\cdot\beta+c\cdot\gamma}{2A_{\triangle ABC}})^2 = (\frac{a\cdot\alpha+b\cdot\beta+c\cdot\gamma}{2A_{\triangle ABC}})^3 \tag{5}$$

și apoi putem începe simplificarea ecuației.

2.2 Determinarea coordonatelor triliniare exacte ale unor puncte importante din triunghi

2.2.1 Vârfurile triunghiului

$$A = 0 : 0 : \frac{2A_{ABC}}{a},\ B = 0 : \frac{2A_{ABC}}{b} : 0,\ C = \frac{2A_{ABC}}{c} : 0 : 0 \tag{6}$$

2.2.2 Mijlocul laturii BC

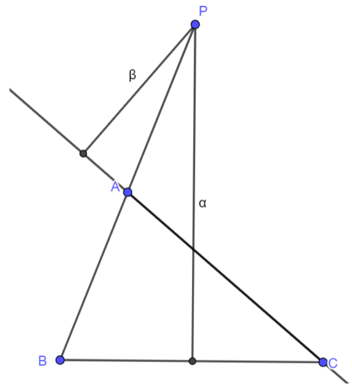
$P \in (BC) \Rightarrow \alpha = 0$
P mijlocul lui $(BC) \Rightarrow A_{\triangle APB} = A_{\triangle APC} = \frac{A_{\triangle ABC}}{2}$
$b\beta = 2 \cdot A_{\triangle APC} = A_{\triangle ABC} \Rightarrow \beta = \frac{A_{\triangle ABC}}{b}$; Analog $\gamma = \frac{A_{\triangle ABC}}{c}$;
Deci coordonatele triliniare exacte ale mijlocului laturii BC sunt:

$$P = 0 : \frac{A_{\triangle ABC}}{b} : \frac{A_{\triangle ABC}}{c} \tag{7}$$

2.2.3 Simetricul punctului A față de punctul B

$P \in (AB) \Rightarrow \gamma = 0$ A mijlocul lui $(BP) \Rightarrow A_{\triangle CBP} = 2 \cdot A_{\triangle ABC}$
$a\alpha = 2 \cdot A_{\triangle CBP} = 4 \cdot A_{\triangle ABC} \Rightarrow \alpha = \frac{4 \cdot A_{\triangle ABC}}{a}$
$A_{\triangle PBC} = A_{\triangle ABC} \Rightarrow b\beta = 2 \cdot A_{\triangle ABC} \Rightarrow \beta = \frac{2 \cdot A_{\triangle ABC}}{b}$
Deci coordonatele triliniare exacte ale simtricului lui A față de B sunt:

$$P = \frac{4A_{\triangle ABC}}{a} : \frac{-2A_{\triangle ABC}}{b} : 0 \tag{8}$$



2.2.4 Centrul cercului înscris

Centrul cercului înscris este egal depărtat de laturile triunghiului $\Rightarrow \alpha = \beta = \gamma$.
$\Rightarrow \frac{a\alpha}{a} = \frac{b\beta}{b} = \frac{c\gamma}{c} = \frac{a\alpha+b\beta+c\gamma}{a+b+c} = \frac{2 \cdot A_{\triangle ABC}}{a+b+c}$ (conform (3))
$\Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = \frac{2 \cdot A_{\triangle ABC}}{a+b+c}$
Deci coordonatele triliniare exacte ale centrului înscris sunt:

$$I = \frac{2 \cdot A_{\triangle ABC}}{a+b+c} : \frac{2 \cdot A_{\triangle ABC}}{a+b+c} : \frac{2 \cdot A_{\triangle ABC}}{a+b+c} \tag{9}$$

În coordonate triliniare (vezi Extindere - (1)), centrul cercului înscris are coordonatele:

$$I = r : r : r = 1 : 1 : 1 \tag{10}$$

2.2.5 Centrul cercului circumscris

Aplicând teorema lui Pitagora obținem:
$\alpha^2 = d^2(O, BC) = R^2 - \frac{a^2}{4} = R^2 - R^2 sin^2 A = R^2 cos^2 A \Rightarrow \alpha = RcosA$
Analog $\beta = RcosB$ și $\gamma = RcosC$.
Deci coordonatele triliniare exacte ale centrului circumscris sunt:

$$O = RcosA : RcosB : RcosC \tag{11}$$

3 Ceviene

Dacă $P = \alpha : \beta : \gamma$ este punctul de concurență a cevienelor AA', BB' și CC', atunci:

$$A' = 0 : \beta : \gamma,\ B' = \alpha : 0 : \gamma,\ C' = \alpha : \beta : 0 \tag{12}$$

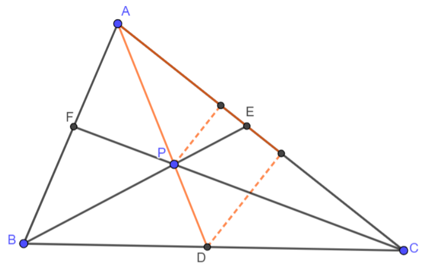
(coordonatele nu sunt neapărat exacte) [Ili16]
Demonstrația se poate face ușor, folosind asemănarea triunghiurilor.

4 Probleme

4.1 Problema 1

Dacă AD, BE și CF sunt ceviene concurente în P, să se arate că $\frac{PD}{AD} + \frac{PE}{BE} + \frac{PF}{CF} = 1$.

Soluție. Ideea din spatele rezolvării constă în exprimarea rapoartelor $\frac{PD}{AD}$, $\frac{PE}{BE}$, $\frac{PF}{CF}$ în funcție de coordonatele triliniare exacte ale punctelor P, F, E și D, adică de distanțele de la P, F, E și D la laturile triunghiului.



Fie $P = x : y : z$ și a, b, c lungimile laturilor $\triangle ABC$. Coordonatele x, y, z nu sunt neapărat exacte deci căutăm să îi aflăm coordonatele triliniare exacte, deoarece doar acestea pot fi ulterior interpretate geometric (fie α, β, γ aceste coordonate exacte).

Din (1) $\Rightarrow x = k \cdot \alpha,\ y = k \cdot \beta,\ z = k \cdot \gamma$

Din (3) $\Rightarrow a\frac{x}{k} + b\frac{y}{k} + c\frac{z}{k} = 2 \cdot A_{\triangle ABC} \Rightarrow k = \frac{ax+by+cz}{2 \cdot A_{\triangle ABC}}$

Deci coordonatele triliniare exacte ale punctului P sunt:

$\alpha = \frac{x}{k} = \frac{2xA_{\triangle ABC}}{ax+by+cz},\ \beta = \frac{y}{k} = \frac{2yA_{\triangle ABC}}{ax+by+cz},\ \gamma = \frac{z}{k} = \frac{2zA_{\triangle ABC}}{ax+by+cz}$

$\Rightarrow d(P, AC) = \gamma = \frac{2zA_{\triangle ABC}}{ax+by+cz}$

Din (12) $\Rightarrow$ dacă $P = x : y : z$, atunci $D = 0 : y : z$. Similar ca mai sus obținem coordonatele triliniare exacte ale punctului D: $D = 0 : \frac{2yA_{\triangle ABC}}{by+cz} : \frac{2zA_{\triangle ABC}}{by+cz}$

$\Rightarrow d(D, AC) = \frac{2zA_{\triangle ABC}}{by+cz}$

$\frac{AP}{AD} = \frac{d(P,AC)}{d(D,AC)} = \frac{2zA_{\triangle ABC}}{ax+by+cz} \cdot \frac{by+cz}{2zA_{\triangle ABC}} = \frac{by+cz}{ax+by+cz}$

$\Rightarrow \frac{AP}{PD} = \frac{ax}{ax+by+cz}$

Analog se obține că $\frac{PE}{BE} = \frac{by}{ax+by+cz}$ și că $\frac{PF}{CF} = \frac{cz}{ax+by+cz}$, de unde rezultă imediat concluzia.

4.2 Problema 2

Dacă D, E, F sunt punctele de contact ale cercului înscris cu laturile triunghiului ABC și Γ punctul lui *Gergonne*, să se arate că $\frac{\Gamma D}{\Gamma A} \cdot \frac{\Gamma E}{\Gamma B} \cdot \frac{\Gamma F}{\Gamma C} = \frac{r}{4R}$.

Idee de rezolvare. Vom nota cu a, b, c lungimile laturilor triunghiului și cu p semiperimetrul acestuia.

Coordonatele triliniare exacte ale lui Γ sunt:

$$\Gamma = \frac{k}{a(p-a)} : \frac{k}{b(p-b)} : \frac{k}{c(p-c)},\ k = \frac{2A_{\triangle ABC}}{\frac{1}{p-a} + \frac{1}{p-b} + \frac{1}{p-c}} \tag{13}$$

Coordonatele triliniare exacte ale lui D sunt: $D = 0 : \frac{2A_{\triangle ABC}(p-c)}{ab} : \frac{2A_{\triangle ABC}(p-b)}{ac}$ și ale lui A sunt: $A = \frac{2A_{\triangle ABC}}{a} : 0 : 0$.

Similar cu problema 1, scriem raportul: $\frac{\Gamma D}{\Gamma A} = \frac{(p-b)(p-c)}{a(p-a)}$ și analoagele, de unde:

$\frac{\Gamma D}{\Gamma A} \cdot \frac{\Gamma E}{\Gamma B} \cdot \frac{\Gamma F}{\Gamma C} = \frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{abc} = \frac{A^2_{\triangle ABC}/p}{4RA_{\triangle ABC}} = \frac{r}{4R}$.

Bibliografie

[Ili16] Cantemir Iliescu. Coordonate triliniare. *Gazeta Matematică*, (6-7-8), 2016.

[Whi66] William Allen Whitworth. *Trilinear coordinates.* 1866.