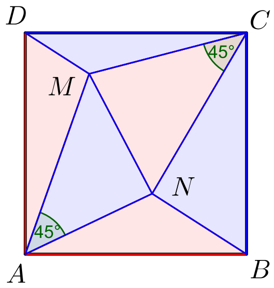
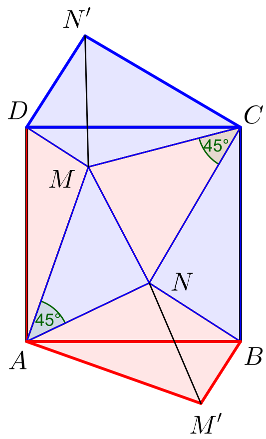
În interiorul pătratului $ABCD$ se consideră două puncte, M şi N, astfel încât $m(\angle MAN) = m(\angle MCN) = 45°$, $M \in Int(\angle NAD)$. Suprafeţele triunghiurilor MAD, MCN şi NAB se colorează cu roşu, iar suprafeţele triunghiurilor MCD, MAN şi NCB se colorează cu albastru.
Arătaţi că suprafaţa colorată cu roşu şi suprafaţa colorată cu albsatru au aceeaşi arie.

Revista Kvant, 2002





Construim, ca în figura de mai sus (cea din dreapta), în exteriorul pătratului, triunghiurile $\Delta DCN' \equiv \Delta BCN$ şi $\Delta ABM' \equiv \Delta ADM$, cu alte cuvinte ,,rotim” triunghiurile CNB şi AMD cu $90°$ în sensul acelor de ceasornic, în jurul punctului C, respectiv în jurul punctului A.

Atunci $m(\angle MCN') = m(\angle MCD) + m(\angle DCN') = m(\angle MCD) + m(\angle BCN) = 90° - m(\angle MCN) = 45°$ şi, analog, $m(\angle NAM') = m(\angle NAM) = 45°$. Cum $CN' = CN$ şi $AM' = AM$ (din construcţie), rezultă că $\Delta MCN' \equiv \Delta MCN$ şi $\Delta NAM' \equiv \Delta NAM$ (L.U.L.). De aici rezultă că $MN' = MN = M'N$, deci şi $\Delta MDN' \equiv \Delta M'BN$ (L.L.L.).

În concluzie, avem că aria suprafeţei albastre (din interiorul pătratului) este

$$\mathcal{A}_{\Delta BCN} + \mathcal{A}_{\Delta CDM} + \mathcal{A}_{\Delta MAN} = \mathcal{A}_{\Delta DCN'} + \mathcal{A}_{\Delta CDM} + \mathcal{A}_{\Delta MAN} =$$
$$\mathcal{A}_{\Delta MCN'} + \mathcal{A}_{\Delta MDN'} + \mathcal{A}_{\Delta MAN} = \mathcal{A}_{\Delta MCN} + \mathcal{A}_{\Delta M'BN} + \mathcal{A}_{\Delta M'AN} =$$
$$\mathcal{A}_{\Delta MCN} + \mathcal{A}_{\Delta ANB} + \mathcal{A}_{\Delta AM'B} = \mathcal{A}_{\Delta MCN} + \mathcal{A}_{\Delta ANB} + \mathcal{A}_{\Delta AMD},$$

adică egală cu aria suprafeţei roşii din interiorul pătratului.