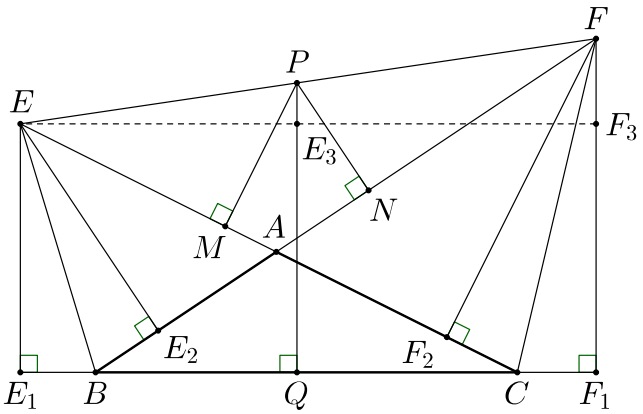
Problema 2. Fie ABC un triunghi obtuzunghic, cu $m(\sphericalangle A) > 90^\circ$. Bisectoarele exterioare ale unghiurilor $\sphericalangle B$ şi $\sphericalangle C$ intersectează dreptele AC, respectiv AB, în punctele E şi F. Fie P un punct oarecare al segmentului (EF) şi M, N, Q proiecţiile lui P pe dreptele AC, AB, respectiv BC.
Demonstraţi că $PQ = PM + PN$.

Soluţie:
Să observăm mai întâi că bisectoarea exterioară a unghiului B intersectează AC în exteriorul laturii, dincolo de A. Acest lucru rezultă din faptul că $m(\sphericalangle EBA) + m(\sphericalangle EAB) < 180^\circ$.
Fie E_1 şi E_2 proiecţiile lui E pe BC, respectiv AB şi fie F_1, F_2 proiecţiile lui F pe BC, respectiv AC. Deoarece E se află pe bisectoarea unghiului $\sphericalangle ABE_1$, avem $EE_1 = EE_2$¿ Analog, $FF_1 = FF_2$. Avem $PN \parallel EE_2$, de unde $\dfrac{PN}{EE_2} = \dfrac{PF}{EF}$. Analog rezultă $\dfrac{PM}{FF_2} = \dfrac{EP}{EF}$, deci $PN + PM = \dfrac{PF}{EF} \cdot EE_2 + \dfrac{PE}{EF} \cdot FF_2 = \dfrac{PF}{EF} \cdot EE_1 + \dfrac{PE}{EF} \cdot FF_1$.

Vom estima PQ în funcţie de EE_1 şi FF_1 din trapezul dreptunghic EE_1F_1F.
Să presupunem că $EE_1 \leq FF_1$, celălalt caz fiind similar. Dacă E_3 şi F_3 sunt proiecţiile lui E pe PQ, respectiv FF_1, avem $PQ = QE_3 + E_3P = EE_1 + \dfrac{PE}{EF} \cdot F_3F = EE_1 + \dfrac{PE}{EF} \cdot (FF_1 - EE_1) = \dfrac{PF}{EF} \cdot EE_1 + \dfrac{PE}{EF} \cdot FF_1 = PN + PM$, ceea ce trebuia demonstrat.



Observaţie: (*Petru Braica*)
Afirmaţia problemei rămâne valabilă şi dacă în loc de bisectoare exterioare se consideră bisectoarele interioare ale unghiurilor B şi C. Demonstraţia este practic neschimbată.