

Problema 2. Determinați numerele reale x care verifică relația $[x] = \{2x\} + \{4x\}$.

* * *

Soluția 1:

Deoarece $0 \leq \{2x\} < 1$ și $0 \leq \{4x\} < 1$, rezultă că $0 \leq [x] < 2$, deci $[x]$ poate fi 0 sau 1.

• Dacă $[x] = 0$ atunci trebuie ca $x \in [0, 1)$ și totodată $\{2x\} = \{4x\} = 0$, adică $2x$ și $4x$ trebuie să fie întregi. Convin $x = 0$ și $x = \frac{1}{2}$.

• Dacă $[x] = 1$, avem pe de-o parte că $x \in [1, 2)$, pe de altă parte că $\{2x\} + \{4x\} = 1$. Această din urmă condiție revine la $2x + 4x \in \mathbb{Z}$, $2x \notin \mathbb{Z}$, $4x \notin \mathbb{Z}$ (a se vedea și problema 2 din paragraful „Probleme instructive” din materialul teoretic). Trebuie așadar ca $6x \in \mathbb{Z}$ dar $2x, 4x \notin \mathbb{Z}$. Convin valorile $x \in \left\{ \frac{7}{6}, \frac{8}{6}, \frac{10}{6}, \frac{11}{6} \right\}$.

În concluzie, soluțiile ecuației sunt $0, \frac{1}{2}, \frac{7}{6}, \frac{4}{3}, \frac{5}{3}, \frac{11}{6}$.

Soluția 2:

Avem $[x] = 2x - [2x] + 4x - [4x]$, adică $6x = [x] + [2x] + [4x] \in \mathbb{Z}$, deci $6x \in \mathbb{Z}$.

Fie $x = \frac{n}{6}$, $n \in \mathbb{Z}$. Ecuația revine la $n = \left[\frac{n}{6} \right] + \left[\frac{n}{3} \right] + \left[\frac{2n}{3} \right]$.

În funcție de restul împărțirii lui n la 6 distingem 6 cazuri:

1. $n = 6k$; ecuația devine $6k = k + 2k + 4k$, de unde $k = 0$, deci $n = 0$, adică $x = 0$;

2. $n = 6k + 1$; ecuația devine $6k + 1 = k + 2k + 4k$, de unde $k = 1$, deci $n = 7$, adică $x = \frac{7}{6}$;

3. $n = 6k + 2$; ecuația devine $6k + 2 = k + 2k + (4k + 1)$, de unde $k = 1$, deci $n = 8$, adică $x = \frac{4}{3}$;

4. $n = 6k + 3$; ecuația devine $6k + 3 = k + (2k + 1) + (4k + 2)$, de unde $k = 0$, deci $n = 3$, adică $x = \frac{1}{2}$;

5. $n = 6k + 4$; ecuația devine $6k + 4 = k + (2k + 1) + (4k + 2)$, de unde $k = 1$, deci $n = 10$, adică $x = \frac{5}{3}$;

6. $n = 6k + 5$; ecuația devine $6k + 5 = k + (2k + 1) + (4k + 3)$, de unde $k = 1$, deci $n = 11$, adică $x = \frac{11}{6}$.

În concluzie, soluțiile ecuației sunt $0, \frac{1}{2}, \frac{7}{6}, \frac{4}{3}, \frac{5}{3}, \frac{11}{6}$.