Problema 4. Doi jucători, Ana şi Bogdan, joacă următorul joc: ei plasează 2017 pietricele pe o masă. Mai întâi Ana ia o pietricică de pe masă. Apoi Bogdan poate lua una sau două pietricele de pe masă. Urmează Ana care poate lua 1, 2, 3 sau 4 pietricele. Apoi Bogdan poate lua cel puţin una şi cel mult 8 pietricele de pe masă şi aşa mai departe, la mutarea j, jucătorul aflat la mutare trebuie să ia cel puţin una şi cel mult 2^{j-1} pietricele de pe masă. Jucătorul care ia ultima pietricică de pe masă câştigă jocul. Care din cei doi jucători are strategie câştigătoare?

Concursul KöMaL, Ungaria, 2017 (problema B.4892.)

Soluţie:

În primele 10 mutări se pot lua de pe masă, în total, cel mult $1+2+4+\ldots+512 = 1023$ pietricele, aşa încât jocul nu se poate termina din mai puţin de 11 mutări. Ana ar putea câştiga din mutarea a 11-a (a 6-a ei mutare) dacă pe masă, după efectuarea primelor 10 mutări, au rămas cel mult 1024 pietricele. Însă Bogdan poate împiedica acest lucru, de exemplu luând la fiecare din primele sale 5 mutări câte o singură pietricică de pe masă. Astfel, numărul pietricelelor luate de pe masă după primele 11 mutări este cel mult $1+1+4+1+16+1+64+1+256+1+1024 = 1370$. Aşadar Bogdan poate face în aşa fel încât după 11 mutări să mai rămână pietricele pe masă. Deoarece la cea de-a 6 mutare a sa (a 12-a în total) Bogdan poate lua până la 2048 de pietricele, ele poate lua toate pietricelele de pe masă, câştigând în acest fel jocul. În concluzie, Bogdan are strategie câştigătoare.