Partea întreagă, partea fracţionară a unui număr real

ABSTRACT: Materialul conţine câteva proprietăţi şi rezultate legate de partea întreagă şi cea fracţionară a unui număr real, precum şi unele probleme reprezentative.

- Lecţia se adresează clasei a VII a.
- Data: 7 octombrie 2012-10-07
- Autor: Lucian Dragomir, Liceul Bănăţean Oţelu Roşu

I. Definiţii, notaţii, proprietăţi.

● Dacă un număr real *a* are scrierea zecimală $a = a_0, a_1a_2a_3...$

(evident $a_0 \in \mathbb{Z}$ şi $a_1, a_2, a_3, ... \in \{0,1,2,...,9\}$), atunci partea întreagă a lui *a* se notează cu $[a]$ şi se defineşte prin $[a] = \begin{cases} a_0 & , \text{dacă } a \geq 0 \\ a_0 - 1 & , \text{dacă } a < 0 \end{cases}$.

● Mai simplu de reţinut: partea întreagă a lui *a* este cel mai mare număr întreg care nu îl depăşeşte pe *a* (este aşadar cel mult egal cu *a*); dacă facem apel la reprezentarea pe axă a numerelor reale, atunci $[a]$ este primul număr întreg din stânga lui *a* .

● În baza axiomei lui Arhimede, se poate spune şi: pentru orice număr real *a* , există un unic număr întreg, notat cu $[a]$, astfel încât $[a] \leq a < [a]+1$; aşadar, pentru orice $a \in \mathbb{R}$ avem: $[a] = k \in \mathbb{Z}$ dacă şi numai dacă $k \leq a < k+1$.

● Prin definiţie, partea fracţionară a numărului real *a* este $\{a\} = a - [a]$; evident $\{a\} \in [0,1)$.

● Vom trece în revistă câteva proprietăţi şi rezultate utile, des folosite în rezolvarea problemelor, fără să uităm a spune că acestea vor uşura trecerea peste unele *obstacole* apărute, de exemplu, în aritmetică, în analiza matematică, în chestiuni de numărare şi combinatorică.

P 1. $a - 1 < [a] \leq a$, $\forall a \in \mathbb{R}$.

P 2. $a < k \Leftrightarrow [a] < k, \forall a \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}$.

P 3. $[k + \alpha] = k, \forall k \in \mathbb{Z}, \alpha \in [0,1)$.

P 4. $[a + k] = [a] + k, \forall a \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}$.

P 5. $\{a + k\} = \{a\}, \forall a \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}$.

P 6. $\left[[a]\right]=[a],\{\{a\}\}=\{a\},\left[\{a\}\right]=\{[a]\}=0,\forall a\in\mathbb{R}.$

P 7. Dacă $a,b\in\mathbb{R}$ şi $[a]=[b]$, atunci $|a-b|<1.$

(Reciproca este falsă; e suficient un contraexemplu: $a=\frac{1}{3},b=-\frac{1}{3}$)

P 8. $\{a\}=\{b\}\Leftrightarrow(a-b)\in\mathbb{Z},\forall a,b\in\mathbb{R}.$

P 9. $[a]+[b]\le[a+b]\le[a]+[b]+1,\forall a,b\in\mathbb{R}.$

P 10. $[-x]+[x]=-1,\ \forall x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$.

P 11. $[a]+\left[a+\frac{1}{2}\right]=[2a],\forall a\in\mathbb{R}.$ (identitatea lui Hermite; de remarcat că aceasta admite o generalizare destul de des utilizată: $[a]+\left[a+\frac{1}{n}\right]+\left[a+\frac{2}{n}\right]+...+\left[a+\frac{n-1}{n}\right]=[na],\forall a\in\mathbb{R},n\in\mathbb{N}^*.$)

P 12. Exponentul numărului prim *p* din descompunerea în factori primi ai numărului $n!$ este

$$\left[\frac{n}{p}\right]+\left[\frac{n}{p^2}\right]+\left[\frac{n}{p^3}\right]+....$$

II. Probleme instructive.

1. **Să se arate că $[na]=[nb],\forall n\in\mathbb{N}$ dacă şi numai dacă $a=b.$**

(Gheorghe Andrei, OJ Constanţa, 1996)

Soluţie: Dacă $a=b$ prima egalitate este evidentă. Presupunând că $a\ne b$ şi $[na]=[nb],\forall n\in\mathbb{N}$, obţinem $na-\{na\}=nb-\{nb\}\Rightarrow n(a-b)=\{na\}-\{nb\}\in(-1,1)$, $\forall n\in\mathbb{N}$. Dacă $a>b$, membrul stâng al ultimei egalităţi poate fi oricât de mare, contradicţie. Analog dacă $a<b$, aşadar $a=b.$ □

2. **Dacă $a,b\in\mathbb{R}$, să se arate că $\{a\}+\{b\}=1$ dacă şi numai dacă $(a+b)\in\mathbb{Z}$ şi $a,b\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}.$**

(Gheorghe Andrei)

Soluţie: Dacă $a,b\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$ şi $(a+b)\in\mathbb{Z}$,atunci $\{a\}+\{b\}\in[0,2)$; cum $\{a\}+\{b\}=a-[a]+b-[b]\in\mathbb{Z}$,deducem că $\{a\}+\{b\}\in\{0,1\}$. Deoarece $\{a\}+\{b\}\ne0$ (în caz contrar am ajunge la $a,b\in\mathbb{Z}$, contradicţie), obţinem $\{a\}+\{b\}=1$.Reciproc, dacă $\{a\}+\{b\}=1$, avem $\{a\}\ne0,\{b\}\ne0$ şi,din $1=\{a\}+\{b\}=a-[a]+b-[b]$, deducem $(a+b)\in\mathbb{Z}$.□

3. **Să se rezolve ecuaţia** $\left[\frac{4x-1}{3}\right]=\frac{3x+1}{4}.$

Soluţie: Trebuie să remarcăm pentru început (şi asta se cam uită) că indiferent de ce expresie aparent stufoasă este $E(x)$, cu $x \in \mathbb{R}$, avem că $[E(x)]$ este întreg, aşadar $\frac{3x+1}{4} \overset{not.}{=} k \in \mathbb{Z}$;

deducem că $x = \frac{4k-1}{3}$ (1) . Pe de altă parte, din $\frac{3x+1}{4} \le \frac{4x-1}{3} < \frac{3x+1}{4} + 1$, se ajunge imediat la $x \in \left[1, \frac{19}{7}\right)$. Folosind acum (1), deducem $1 \le \frac{4k-1}{3} < \frac{19}{7}$, de unde $1 \le k < \frac{16}{7}$; cum însă $k \in \mathbb{Z}$, obţinem $k \in \{1, 2\}$ şi, corespunzător, $x \in \left\{1, \frac{7}{3}\right\}$. □

4. Să se determine numerele reale pozitive *x* şi *y* pentru care $\begin{cases} x + 2[y] = 1{,}5 \\ y + 2[x] = 2{,}5 \end{cases}$.

Soluţie: Adunăm ecuaţiile sistemului dat şi ajungem la $3[x] + 3[y] + \{x\} + \{y\} = 4$; deoarece $x, y \ge 0, x, y \notin \mathbb{Z}$ şi $\{x\} + \{y\} \in [0, 2)$, deducem că $\{x\} + \{y\} = 1$ şi astfel avem şi $[x] + [y] = 1$. Cazul $[x] = 0, [y] = 1$ este exclus datorită primei ecuaţii, aşadar rămâne doar $[x] = 1, [y] = 0$, de unde obţinem imediat $x = 1{,}5$ şi $y = 0{,}5$.

Observaţie: Relaţiile şi condiţiile din enunţ sunt atât de generoase încât permit obţinerea şi mai rapidă a soluţiilor (se pot determina separat părţile fracţionare, respectiv întregi ale necunoscutelor). Cum $[x], [y] \in \mathbb{N}$, prima ecuaţie conduce la $\{x\} = 0{,}5$, apoi la $[x] + 2[y] = 1$; similar, a doua ecuaţie conduce la $\{y\} = 0{,}5$ şi $[y] + 2[x] = 2$; se obţine astfel $[x] = 1, [y] = 0$ şi concluzia este imediată. □

5. a) Să se arate că nu există numere reale *x* pentru care $\left[\frac{x}{2}\right] = x^2 + 1$.

b) Să se determine numerele reale *y* pentru care $\left[\frac{y}{2}\right] = y^2$.

(Lucian Dragomir, OL Caraş Severin, 2009)

Soluţie: a) Dacă $x < 0$, membrul stâng este negativ, iar cel drept strict pozitiv; evident, $x = 0$ nu verifică, iar dacă $x \in (0, 2)$, membrul stâng este 0, pe când cel drept este supraunitar; în general acum, dacă $x \in [2k, 2k+2), k \in \mathbb{N}^*$, avem $\left[\frac{x}{2}\right] = k$ şi $x^2 + 1 \ge 4k^2 > k, \forall k \in \mathbb{N}^*$, aşadar ecuaţia nu are soluţii reale; b) se observă soluţia $y = 0$ şi, printr-un raţionament asemănător cu cel anterior, se arată că nu mai există alte numere reale *y* care să satisfacă egalitatea din enunţ. □

6. Să se rezolve ecuaţia $[-2x] + [-x] + [x] + [2x] + 1 = 0$.

(Andrei Eckstein, OL Timiş, 2009)

Soluţie: Este naturală folosirea proprietăţii **P 10.** (cu evidenta observaţie că $[-x] + [x] = 0, \ \forall x \in \mathbb{Z}$). Avem astfel că, dacă $x \in \mathbb{Z}$, ecuaţia conduce la $0 + 0 + 1 = 0$, evident fals, deci ecuaţia nu are soluţii întregi. Dacă $x \notin \mathbb{Z}$ şi $2x \notin \mathbb{Z}$, se ajunge la egalitatea $-1 + (-1) + 1 = 0$ (falsă şi aceasta). Dacă $2x \in \mathbb{Z}$, dar $x \notin \mathbb{Z}$, atunci $[-2x]+[-x]+[x]+[2x]+1=0+(-1)+1=0$, aşadar orice $x \notin \mathbb{Z}$ pentru care $2x \in \mathbb{Z}$ este soluţie a ecuaţiei, mulţimea soluţiilor acesteia fiind $S=\left\{\frac{2n+1}{2} \mid n \in \mathbb{Z}\right\}$.

7. Să se găsească perechile ordonate (x, y) de numere pozitive şi distincte pentru care

$$x+y=1{,}5 \text{ **şi** } [x-y]+[y-x]=0.$$

(Lucian Dragomir)

Soluţie: A doua egalitate din enunţ se poate scrie $x-y-\{x-y\}+y-x-\{y-x\}=0$, de unde $\{x-y\}=\{y-x\}=0$. Folosind **P.8.** avem că $(x-y-y+x)=2(x-y) \in \mathbb{Z}$, deci $x-y=\frac{k}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

Deoarece avem şi $x+y=1{,}5$, deducem imediat că $x=\frac{k+3}{4}, y=\frac{3-k}{4}$. Cum însă $x, y \geq 0$,ajungem la $k \in \{0,1,2,3\}$. Analizăm uşor aceste cazuri şi obţinem perechile cerute: $\left(1, \frac{1}{2}\right),\left(\frac{5}{4}, \frac{1}{4}\right),\left(\frac{3}{2}, 0\right)$. □

8. Să se rezolve ecuaţia $\left[x^{2003}\right]+\left[x^{2002}\right]+\ldots+\left[x^{2}\right]+[x]=\{x\}-1.$

(Concurs Ucraina,2003)

Soluţie: Membrul stâng al ecuaţiei este număr întreg, deci , dacă *x* este o soluţie a ecuaţiei, avem $\{x\} \in \mathbb{Z}$; cum însă $\{x\} \in [0,1)$, ajungem la $\{x\}=0 \Rightarrow x \in \mathbb{Z}$; ecuaţia devine astfel $x^{2003}+x^{2002}+\ldots+x^{2}+x+1=0$ sau $(x+1)\left(x^{2002}+x^{2000}+\ldots+x^{2}+1\right)=0$. Deoarece suma din a doua paranteză este strict pozitivă, se obţine unica soluţie a ecuaţiei $x=-1$. □

9. a) Să se arate că $n[x] \leq [nx], \forall x \in \mathbb{R}_{+}, n \in \mathbb{N}$.

b) Să se determine toate numerele reale pozitive *x* pentru care

$[x], 2[x], [2x]$ **sunt numere naturale consecutive.**

(Mircea Fianu,OL Bucureşti,2002)

Soluţie: a) $[nx]=[n[x]+n\{x\}]=n[x]+[n\{x\}] \geq n[x]$.

b) Pentru $x>0$ avem aşadar $[x]<2[x]<[2x]$; deoarece $2[x]-[x]=1$, deducem că $[x]=1$, apoi $[2x]=3$ şi astfel ajungem la $\{x\} \in\left[\frac{1}{2}, 1\right)$, de unde $x \in\left[\frac{3}{2}, 2\right)$. Verificăm acum că toate aceste numere satisfac condiţia din enunţ.□

10. Să se arate că prin împărţirea lui $k\in\mathbb{Z}$ la $n\in\mathbb{N}^*$ se obţine câtul $\left[\frac{k}{n}\right]$ şi restul $n\cdot\left\{\frac{k}{n}\right\}$.

Soluţie: Notăm câtul şi restul cu q , respectiv r şi avem: $k=nq+r$, $cu\ 0\le r<n$. Deducem acum:

$q\le\frac{nq+r}{n}=\frac{k}{n}<\frac{nq+n}{n}=q+1$, aşadar $\left[\frac{k}{n}\right]=q$. Pe de altă parte,

$$n\cdot\left\{\frac{k}{n}\right\}=n\left(\frac{k}{n}-\left[\frac{k}{n}\right]\right)=n\left(\frac{nq+r}{n}-q\right)=r.$$

Observaţie: Această problemă pune în evidenţă faptul că, dacă $n\in\mathbb{N}^*$, atunci în mulţimea $\{1,2,3,...,k\}$ avem exact $\left[\frac{k}{n}\right]$ multipli de *n* .□

11. Să se determine câte numere naturale nenule, mai mici decât 100, nu sunt divizibile nici cu 2, nici cu 3.

Soluţie: Ne referim aşadar la mulţimea $\{1,2,3,...,99\}$ în care avem $\left[\frac{99}{2}\right]=49$ de numere divizibile cu 2 şi $\left[\frac{99}{3}\right]=33$ de numere divizibile cu 3. Am fi poate tentaţi să dăm rezultatul $99-(49+33)$, însă trebuie să remarcăm că unele numere au fost numărate de două ori (de exemplu 6, 12 , 18 , ...) – numărul acestora este egal cu $\left[\frac{99}{2\cdot 3}\right]=16.$ Abia acum putem da rezultatul corect: avem $99-(49+33-16)=33$ de numere cu proprietatea din enunţ.

Observaţie: Să remarcăm aici că soluţia foloseşte de fapt un binecunoscut principiu de numărare, anume **Principiul includerii şi excluderii.** Este vorba despre următorul rezultat:

(1) Dacă *A* şi *B* sunt două mulţimi finite, atunci $|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|$.

(principiul includerii şi excluderii pentru două mulţimi)

(2) Dacă *A, B, C* sunt trei mulţimi finite, atunci

$$|A\cup B\cup C|=|A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|B\cap C|-|C\cap A|+|A\cap B\cap C|.$$

(principiul includerii şi excluderii pentru trei mulţimi). □

12. Să se determine care este exponentul lui 2 în descompunerea în factori primi ai numărului $100!=1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot 100.$

Soluţie: În mulţimea $\{1,2,3,...,100\}$ avem $\left[\frac{100}{2}\right]=50$ de numere divizibile cu 2; dintre aceste 50 de numere, fiecare al doilea este divizibil cel puţin cu puterea a doua a lui 2 – sunt $\left[\frac{100}{2^2}\right]=25$ de astfel de numere; dintre acestea, fiecare al doilea este divizibil cel puţin cu 2^3. Raţionăm la fel în continuare, ţinem cont că $2^7 > 100$ şi că fiecare factor al lui $100!$ care este divizibil cu 2^k, dar nu şi cu 2^{k+1}, $\left(k \in \{1,2,3,4,5,6,\}\right)$, se socoteşte, în modul indicat, de *k* ori ca fiind divizibil cu $2, 2^2, 2^3, ..., 2^k$. Exponentul căutat este astfel

$$\left[\frac{100}{2}\right]+\left[\frac{100}{2^2}\right]+...+\left[\frac{100}{2^6}\right]=50+25+12+6+3+1=97.$$

Observaţie: Evident, puteam folosi direct proprietatea **P 12,** ţinând cont doar de faptul că $\left[\frac{100}{2^k}\right]=0, \forall k \in \mathbb{N}, k \geq 7$; am preferat însă aici să vedem efectiv cum se ajunge la aceasta.

13. Să se rezolve ecuaţia $\left[\frac{x}{2}\right]+\left[\frac{x}{3}\right]+\left[\frac{x}{4}\right]=x.$

(Olimpiadă Canada)

Soluţie: Remarcăm din nou că, dacă $x \in \mathbb{R}$ este o soluţie a ecuaţiei, atunci $x \in \mathbb{Z}$ (membrul drept este o sumă de numere întregi); pentru a ne uşura căutările, *privim* ecuaţia modulo k, unde *k* este c.m.m.m.c al numerelor de la numitori, adică în cazul de faţă $k = 12$. Pentru $x = 12q + r$, cu $q \in \mathbb{Z}, r \in \{0,1,2,...11\}$, folosind din nou **P.**4, ecuaţia conduce la :

$$6q+\left[\frac{r}{2}\right]+4q+\left[\frac{r}{3}\right]+3q+\left[\frac{r}{4}\right]=12q+r \text{ sau } q+\left[\frac{r}{2}\right]+\left[\frac{r}{3}\right]+\left[\frac{r}{4}\right]=r.$$

Calcule imediate conduc la rezultatele căutate, care pot fi sintetizate (de exemplu), într-un tabel de forma:

r	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
q	0	1	1	1	0	1	0	1	0	0	0	1
x	0	13	14	15	4	17	6	19	8	9	10	23

Observaţie: Folosind **P 1.** avem $\frac{x}{2}-1<\left[\frac{x}{2}\right]\leq\frac{x}{2}$ şi analoagele, de unde, prin adunarea celor trei relaţii, se ajunge la $\frac{13x}{12}-3<x\leq\frac{13x}{12} \Rightarrow 0 \leq x < 36,\ x \in \mathbb{Z}$. Căutările se limitează astfel destul de mult.

14. Să se rezolve ecuaţia $\left[\frac{x+1}{2}\right]+\left[\frac{x+2}{3}\right]+\left[\frac{x+3}{4}\right]=3x.$

(Aurel Doboşan)

Soluţie: Deoarece membrul stâng este o sumă de numere întregi, avem că $3x=k\in\mathbb{Z}\Rightarrow x=\frac{k}{3}$ şi astfel ecuaţia conduce la $\left[\frac{k+3}{6}\right]+\left[\frac{k+6}{9}\right]+\left[\frac{k+9}{12}\right]=k.$ Folosind **P.4.** ajungem acum la: $\left[\frac{k-3}{6}\right]+1+\left[\frac{k-3}{9}\right]+1+\left[\frac{k-3}{12}\right]+1=k$; notăm $k-3=m\in\mathbb{Z}$ şi astfel: $\left[\frac{m}{6}\right]+\left[\frac{m}{9}\right]+\left[\frac{m}{12}\right]=m$. (*) .

Deoarece $\frac{m}{6}-1<\left[\frac{m}{6}\right]\le\frac{m}{6}$, $\frac{m}{9}-1<\left[\frac{m}{9}\right]\le\frac{m}{9}$, $\frac{m}{12}-1<\left[\frac{m}{12}\right]\le\frac{m}{12}$, ajungem la:

$\frac{13m}{36}-3<m\le\frac{13m}{36}$ şi,imediat, $m\in\{-4,-3,-2,-1,0\}$. Egalitatea (*) este însă verificată doar pentru $m\in\{-3,0\}$ şi astfel se ajunge la $x\in\{0,1\}$ (Verificare!).□

15. Să se arate că pentru orice $x\in\mathbb{R}$ **este adevărată egalitatea:**

$$\left[\frac{x+3}{6}\right]-\left[\frac{x+4}{6}\right]+\left[\frac{x+5}{6}\right]=\left[\frac{x+1}{2}\right]-\left[\frac{x+1}{3}\right].$$

(Cristinel Mortici,OJ, 2002)

Soluţie: Notăm $\frac{x+1}{6}=y$ şi egalitatea propusă devine $\left[y+\frac{1}{3}\right]-\left[y+\frac{1}{2}\right]+\left[y+\frac{2}{3}\right]=[3y]-[2y]$;

aceasta se obţine imediat din identităţile de tip **P.11.**: $[2y]=[y]+\left[y+\frac{1}{2}\right]$ şi

$[3y]=[y]+\left[y+\frac{1}{3}\right]+\left[y+\frac{2}{3}\right]$. □

16. Să se determine $x\in\mathbb{R}$ **pentru care** $x=\frac{\{x\}}{[x]}$.

(Titu Andreescu,OL Sibiu,2003)

Soluţie: Evident, $x\notin[0,1)$ (dacă $x\in[0,1)$ am avea numitorul nul, absurd). Deosebim următoarele cazuri:

(i) $x\in[1,\infty)$. Avem în acest caz $\frac{\{x\}}{[x]}\ge1$ şi $[x]\ge1$,de unde $[x]\le\{x\}<1$,absurd;

(ii) $x\in(-\infty,-1)$,adică $\frac{\{x\}}{[x]}<-1$; deoarece $[x]\le-2$,avem $-[x]<\{x\}<1\Rightarrow[x]>-1$,contradicţie;

(iii) $x\in[-1,0)\Rightarrow[x]=-1$; în acest caz ecuaţia devine $x=-\{x\}$ sau $[x]+\{x\}=-1+\{x\}=-\{x\}$,de unde $\{x\}=\frac{1}{2}$. Am obţinut astfel unica soluţie a ecuaţiei iniţiale,anume $x=-\frac{1}{2}$. □

17. Să se determine cel mai mare număr natural *x* pentru care $2000!$ este divizibil cu 23^{6+x}.

(Juriu OBMJ,2000)

Soluţie: Numărul 23 este prim şi divide fiecare al 23-lea număr natural,aşadar există $\left[\frac{2000}{23}\right]=86$ numere care sunt mai mici sau egale cu 2000 şi sunt divizibile cu 23.Analog, doar trei numere mai mici sau egale cu 2000 sunt divizibile cu 23^2 ,deci 23^{89} divide 2000!;rezultă că cel mai mare număr natural căutat este $x=89-6=83$. □

18. Determinaţi numerele naturale n care verifică următoarele proprietăţi:

a) $\left[\frac{n}{12}\right]$ **este un număr natural de trei cifre, ultimele două fiind egale cu 0.**

b) $\left[\frac{n+36}{3}\right]$ **este un număr natural de patru cifre, acestea fiind 2,0,1,2 (nu neapărat în această ordine)**

(Lucian Dragomir, Concurs RMCS, 2012)

Soluţie : $\left[\frac{n}{12}\right]=\overline{a00}\Rightarrow 1200\cdot a\le n<1200\cdot a+12$ (1). Notăm cu *A* mulţimea numerelor de patru cifre formate cu cifrele 2, 0, 1, 2 ; cel mai mic element al acestei mulţimi este 1022, iar cel mai mare 2210;

din $\left[\frac{n+36}{3}\right]\overset{not.}{=}k\in A$ deducem că $1022\le\frac{n+36}{3}$ şi $\frac{n+36}{3}<2211$, de unde

$3030\le n<6597$. Din (1) rezultă astfel că $a\in\{3,4,5\}$. Pentru $a=3$ se obţine $k\notin A$, la fel pentru $a=4$. Pentru $a=5$ se ajunge la $n\in\{6000,6001,6002\}$, numere care verifică ambele condiţii din enunţ.

19. Să se arate că dacă *m* şi *n* sunt numere naturale prime între ele, atunci

$$\left[\frac{m}{n}\right]+\left[\frac{2m}{n}\right]+\ldots+\left[\frac{(n-1)m}{n}\right]=\frac{1}{2}(m-1)(n-1).$$

(Gauss)

Soluţie: Considerăm în plan punctele $A(n,0),B(n,m),C(0,m)$. În interiorul dreptunghiului *OABC* se află $(m-1)(n-1)$ puncte de coordonate întregi;deoarece $(m,n)=1$,pe diagonala *OB* nu se află astfel de puncte, iar sub diagonală se află $\frac{(m-1)(n-1)}{2}$ puncte de forma (k,h), $cu\ k,h\in\mathbb{N}^*$.Pentru *k* fixat, există $\left[\frac{km}{n}\right]$ puncte şi astfel, în total, sub diagonala *OB* sunt $\sum_{k=0}^{n-1}\left[\frac{km}{n}\right]$ puncte. Identificând cele două rezultate ajungem la $\sum_{k=0}^{n-1}\left[\frac{km}{n}\right]=\frac{1}{2}(m-1)(n-1)$.□

20. Se consideră numerele naturale *m* şi *n* , $n\geq 1$. Să se determine numerele reale *x* pentru care

$$[x+1]+\left[x+\frac{1}{2}\right]+\left[x+\frac{1}{3}\right]+...+\left[x+\frac{1}{n}\right]=m.$$

(Mircea Becheanu,ON,1988)

Soluţie: Presupunem că prin împărţirea lui *m* la *n* se obţine câtul *q* şi restul *r*. Pentru ca egalitatea din enunţ să fie adevărată, deoarece părţile întregi din membrul stâng pot diferi prin cel mult o unitate, trebuie ca cei mai mici termeni din membrul stâng să fie egali cu *q*, iar *r* dintre ei să fie egali cu $q+1$.

Dacă $r=0$, atunci $\left[x+\frac{1}{n}\right]=\left[x+\frac{2}{n}\right]=...=[x+1]=q$ conduce la

$q\leq x+\frac{1}{n}<x+\frac{1}{n-1}<...<x+1<q+1$, de unde $x\in\left[q-\frac{1}{n},q\right)$.

Dacă $r\neq 0$, trebuie să avem $\left[x+\frac{1}{n}\right]=\left[x+\frac{1}{n-1}\right]=...=\left[x+\frac{1}{r+1}\right]=q$ şi

$\left[x+\frac{1}{r}\right]+\left[x+\frac{1}{r-1}\right]+...+[x+1]=q+1$, de unde

$q\leq x+\frac{1}{n}<...<x+\frac{1}{r+1}<q+1\leq x+\frac{1}{r}<...<x+1<q+2\Rightarrow x\in\left[q+1-\frac{1}{r},q+1-\frac{1}{r+1}\right)$. □

III. Probleme propuse.

(1) Rezolvaţi ecuaţia $[x]+4\cdot\{x\}=2005$.

Vasile Chiriac, Bacău

(2) Rezolvaţi ecuaţia $\left[\frac{x}{2}\right]+\left[\frac{x}{3}\right]+\left[\frac{x}{6}\right]=x$.

(3) Arătaţi că $[x]+[nx]=[(n+1)x],\ \forall x\in\mathbb{N}$ dacă şi numai dacă $x\in\mathbb{Z}$.

(4) Rezolvaţi în $\mathbb{R}$ ecuaţia $\{x\}-\{2x\}=x$.

Costel Chiteş, OL Bucureşti, 2000

(5) Se consideră un număr real r pentru care

$$\left[r+\frac{19}{100}\right]+\left[r+\frac{20}{100}\right]+\left[r+\frac{21}{100}\right]+\ldots+\left[r+\frac{91}{100}\right]=546.$$

Determinaţi $[100r]$.

Concurs AIME (SUA), 1991

Bibliografie:

[1] Gheorghe Andrei, Ion Cucurezeanu, Constantin Caragea – Probleme de algebră, Funcţiile parte întreagă şi parte fracţionară, Editura Gil, 1996

[2] Mihai Onucu Drimbe – 200 de identităţi şi inegalităţi cu „ partea întreagă”, Editura Gil, 2004

[3] (colectiv) Matematică (olimpiade şi concursuri şcolare) – Editura Paralela 45, 2009, 2010, 2011

Periodice:

[4] Gazeta Matematică (G.M) , colecţia 2000 – 2012

[5] Revista de matematică a elevilor şi profesorilor din Caraş – Severin (RMCS), colecţia 2008 – 2012