

Clasa a X-a - Etapa 7 - Problema 4

Enunț: Se consideră un triunghi ascuțitunghic ABC . Construim șirul de triunghiuri $(A_n B_n C_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definit prin $A_0 B_0 C_0 = ABC$ iar pentru triunghiul $A_{n+1} B_{n+1} C_{n+1}$, măsurile unghiurilor sale sunt definite prin $\widehat{A}_{n+1} = \frac{\pi - \widehat{A}_n}{2}$, $\widehat{B}_{n+1} = \frac{\pi - \widehat{B}_n}{2}$, $\widehat{C}_{n+1} = \frac{\pi - \widehat{C}_n}{2}$ iar raza cercului circumscris R_{n+1} este egală cu $\sqrt{2R_n r_n}$, unde R_n , r_n sunt raza cercului circumscris, respectiv înscris triunghiului $A_n B_n C_n$. Să se arate că:

- Dacă S_n reprezintă aria triunghiului $A_n B_n C_n$, atunci șirul $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este constant;
- Să se demonstreze că șirul $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este crescător.

Soluție: Fie p_n semiperimetrul triunghiului $A_n B_n C_n$. Avem în continuare

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= 2R_{n+1} \sin A_{n+1} = 2\sqrt{2R_n r_n} \cos \frac{A_n}{2} = 2\sqrt{2 \frac{a_n b_n c_n}{4S_n} \cdot \frac{S_n}{p_n} \cdot \sqrt{\frac{p_n(p_n - a_n)}{b_n c_n}}} \\ &= \sqrt{a_n(2p_n - 2a_n)} = \sqrt{a_n(b_n + c_n - a_n)}, \text{ deci } a_{n+1} = \sqrt{a_n(b_n + c_n - a_n)} \text{ și analogele.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{a) Avem } S_{n+1} &= \frac{1}{2} b_n c_n \sin A_{n+1} = \frac{1}{2} \sqrt{b_n(a_n + c_n - b_n)} \sqrt{c_n(a_n + b_n - c_n)} \cos \frac{A_n}{2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{b_n(a_n + c_n - b_n)} \sqrt{c_n(a_n + b_n - c_n)} \sqrt{\frac{p_n(p_n - a_n)}{b_n c_n}} = S_n \text{ deci șirul } S_n \text{ este constant.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } a_{n+1} &= \sqrt{a_n(b_n + c_n - a_n)} \leq \frac{a_n + b_n + c_n - a_n}{2} = \frac{b_n + c_n}{2} \text{ și analogele. Prin însumare deducem că} \\ a_{n+1} + b_{n+1} + c_{n+1} &\leq a_n + b_n + c_n \text{ deci șirul } (p_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ este descrescător. Cum } S_n = p_n r_n \text{ atunci șirul } (r_n)_{n \in \mathbb{N}} \\ &\text{este crescător.} \end{aligned}$$