Clasa a X-a - Etapa a V-a - Problema 1

Enunţ. *Fie* $n, k \in \mathbb{N}$ *cu* $1 \leq k \leq 2019$. *Din fiecare submulţime cu* k *elemente a mulţimii* $\{1, 2, 3, ..., 2019\}$ *alegem cel mai mic element. Demonstraţi că media aritmetică a tuturor acestor numere este egală cu* $\dfrac{2020}{k+1}$.

Soluţie. Evident, numărul total de submulţimi este C_{2019}^{k}. Fie A o submulţime cu k elemente şi $m(A)$ cel mai mic element al său. Evident $m(A) \leq 2020 - k$. Fie $s \in \{1, 2, .., 2020 - k\}$ astfel încât $m(A) = s$. Atunci celelatte $k - 1$ elemente din, diferite de s, sunt din mulţimea $\{s + 1, s + 2, ..., 2019\}$, deci sunt C_{2019-s}^{k-1} submulţimi pentru care $m(A) = s$.

Atunci media aritmetică este

$$\begin{aligned}
M &= \frac{1 \cdot C_{2018}^{k-1} + 2 \cdot C_{2017}^{k-1} + 3 \cdot C_{2016}^{k-1} + ... + (2020 - k) \cdot C_{k-1}^{k-1}}{C_{2019}^{k}} \\
&= \frac{\left(C_{2019}^{k} - C_{2018}^{k}\right) + 2\left(C_{2018}^{k} - C_{2017}^{k}\right) + ... + (2019 - k)\left(C_{k+1}^{k} - C_{k}^{k}\right) + (2020 - k)\, C_{k}^{k}}{C_{2019}^{k}} \\
&= \frac{C_{2019}^{k} + C_{2018}^{k} + C_{2017}^{k} + ... + C_{k}^{k}}{C_{2019}^{k}} \\
&= \frac{C_{2020}^{k+1} - C_{2019}^{k+1} + C_{2019}^{k+1} - C_{2018}^{k+1} + ...}{C_{2019}^{k}} \\
&= \frac{C_{2020}^{k+1}}{C_{2019}^{k}} = \frac{2020}{k+1}.
\end{aligned}$$

□