Clasa a VIII-a

Problema 1. Determinaţi numerele prime p şi q astfel încât $\sqrt{p^2+6pq+q^2}$ să fie număr raţional.

Gazeta Matematică

Soluție și barem:

Căutăm numerele prime p şi q, $p<q$, astfel încât $p^2+6pq+q^2$ să fie pătrat perfect. Cazul $p=q$ nu convine deoarece $\sqrt{8p^2}\notin\mathbb{Q}$. **1p**

Avem cazurile:

Caz I: $p=2$ şi $q=3$ este soluţie. **1p**

Caz II: $p=2$ şi $q\geq 5$. Atunci $q=M_3\pm 1$, aşadar $p^2+6pq+q^2=M_3+2\neq$ pătrat perfect **1p**

Caz III: $p=3$. Atunci $9+18q+q^2=t^2$, $t\in\mathbb{N}$, deci $[(q+9)-t][(q+9)+t]=72$, ambii factori fiind numere pare. Găsim $q\in\{0,2,10\}$, dar q trebuie să fie număr prim mai mare decât p. În acest caz nu avem soluţii. **2p**

Cazul IV: $p,q\geq 5$. Atunci $p^2+6pq+q^2=M_3+2\neq$ pătrat perfect. **1p**

Cum expresia de sub radical este simetrică, soluţiile sunt:

$(p,q)\in\{(2,3);(3,2)\}$. **1p**