Etapa 7, Problema 2

Fie x, y, z, trei numere complexe, distincte, de modul 1. Demonstraţi că

$$\frac{1}{|x-y| \cdot |x-z|} + \frac{1}{|y-x| \cdot |y-z|} + \frac{1}{|z-y| \cdot |z-y|} \geq 1.$$

Dorin Andrica

Soluţie.
Considerăm punctele $A(x), B(y), C(z)$ situate pe cercul cu centru în origine, de rază 1. Avem:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{|x-y| \cdot |x-z|} + \frac{1}{|y-x| \cdot |y-z|} + \frac{1}{|z-y| \cdot |z-y|} \\
= \; & \frac{1}{AB \cdot AC} + \frac{1}{BA \cdot BC} + \frac{1}{CA \cdot CB} \\
= \; & \frac{AB + BC + CA}{AB \cdot BC \cdot CA} = \frac{2p}{4SR} = \frac{p}{2S} \\
= \; & \frac{1}{2r} \geq \frac{1}{R} = 1.
\end{aligned}$$