Etapa 3, Problema 4

Se consideră numărul $a \in (0,1) \cap \mathbb{Q}$ *şi mulţimile*

$$A = \left\{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,\middle|\, f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x)+f(y)}{2} \right\};$$

$$B = \left\{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,\middle|\, f\left(ax+(1-a)y\right) = af(x)+(1-a)f(y) \right\}.$$

a) Arătaţi că $\frac{x+y}{2} = a\left((1-a)x + a\frac{x+y}{2}\right) + (1-a)\left(ay + (1-a)\frac{x+y}{2}\right),\ \forall\ x,y \in \mathbb{R}.$

b) Demonstraţi că $A = B$.

***

Soluţie.

a) Calcul direct.

b) Fie $f \in A$. Printr-o inducţie de tip Cauchy se demonstrează relaţia

$$f\left(\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}\right) = \frac{f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_n)}{n},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq 2, \forall x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}.$$

Inducţia are următorii paşi:

- egalitatea este adevărată pentru $n = 2$, din ipoteză;
- presupuneam egalitatea adevărată pentru $n = k$ şi o demonstrăm apoi pentru $n = 2k$;
- din egalitatea adevărată pentru $n = 2k$, particularizând $x_{2k} = \frac{x_1+x_2+\ldots+x_{2k-1}}{2k-1}$, obţinem relaţia adevărată pentru $n = 2k-1$.

Pentru $a \in \mathbb{Q} \cap (0,1)$, există $m, n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $a = \frac{m}{n}$. Atunci

$$f\left(ax+(1-a)y\right) = f\left(\frac{m}{n}x + \left(1-\frac{m}{n}\right)y\right) = f\left(\frac{mx+(n-m)y}{n}\right)$$

$$= \frac{mf(x)+(n-m)f(y)}{n} = af(x)+(1-a)f(y),$$

deci $f \in B$.

Fie acum $f \in B$. Folosim identitatea de la punctul a) şi obţinem:

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = f\left(a\left((1-a)x + a\frac{x+y}{2}\right) + (1-a)\left(ay + (1-a)\frac{x+y}{2}\right)\right)$$

$$= af\left((1-a)x + a\frac{x+y}{2}\right) + (1-a)f\left(ay + (1-a)\frac{x+y}{2}\right)$$

$$= a\left((1-a)f(x) + af\left(\frac{x+y}{2}\right)\right) + (1-a)\left(af(y) + (1-a)f\left(\frac{x+y}{2}\right)\right)$$

$$= a(1-a)\left(f(x)+f(y)\right) + f\left(\frac{x+y}{2}\right) - \left(2a-2a^2\right)f\left(\frac{x+y}{2}\right)$$

Rezultă că $\left(2a-2a^2\right)f\left(\frac{x+y}{2}\right) = a(1-a)\left(f(x)+f(y)\right)$ şi, după o simplificare cu $2a(1-a)$, deducem că $f \in A$. Astfel, soluţia este completă.