Problemă. Fie $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ o funcţie convexă. Demonstraţi că există o unică funcţie $g : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, astfel încât $f\big(x + g(x)\big) = f\big(g(x)\big) - g(x)$, pentru toate numerele reale $x \geq 0$.

Dan Schwarz, Bucureşti

Soluţie.

Vom arăta mai întâi că f este continuă.
Fie $a_1 < a_2 < x < a < a_3$. Din convexitate rezultă

$$\frac{f(a_2) - f(a_1)}{a_2 - a_1} \leq \frac{f(a) - f(x)}{a - x} \leq \frac{f(a_3) - f(a)}{a_3 - a},$$

deci

$$(a - x)\frac{f(a_2) - f(a_1)}{a_2 - a_1} \leq f(a) - f(x) \leq (a - x)\frac{f(a_3) - f(a)}{a_3 - a},$$

de unde $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = f(a)$. Analog $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = f(a)$.

Ceea ce se cere este echivalent cu faptul că $f(a + x) - f(x) = -x$, ca ecuaţie în x, admite o soluţie unică $g(a)$ pentru orice $a \geq 0$. Să definim $f_a(x) = f(a + x) - f(x)$ pentru $a \geq 0$; f fiind convexă, rezultă că f_a este monoton crescătoare. Considerăm intervalul $[-|f_a(0)|, |f_a(0)|]$ şi funcţia $f_a + \mathrm{id}$. Atunci

$$f_a(-|f_a(0)|) + (-|f_a(0)|) \leq f_a(0) - |f_a(0)| \leq 0$$

şi

$$f_a(|f_a(0)|) + |f_a(0)| \geq f_a(0) + |f_a(0)| \geq 0.$$

Cum funcţia $f_a + \mathrm{id}$ este continuă, ea se anulează în cel puţin un punct x_a. Soluţia va fi unică deoarece dacă presupunem că $x_1 < x_2$ sunt soluţii, avem că $0 = f_a(x_1) + x_1 = f_a(x_2) + x_2$,

deci $0 \leq f_a(x_2) - f_a(x_1) = x_1 - x_2 < 0$, absurd.
Aşadar, soluţia unică x_a determină, în mod unic, funcţia g, cu $g(a) = x_a$.