Problema 1. Determinaţi numerele naturale n care se pot scrie ca produs de trei numere de forma $\dfrac{2k+1}{k+1}$ cu $k \in \mathbb{N}$.

* * *

Soluţie: Să observăm mai întâi că dacă $n = \dfrac{2a+1}{a+1} \cdot \dfrac{2b+1}{b+1} \cdot \dfrac{2c+1}{c+1}$, cu $a, b, c \in \mathbb{N}$, atunci $n < 8$ şi n este impar. Într-adevăr, avem că $\dfrac{2k+1}{k+1} < 2$ pentru orice $k \in \mathbb{N}$, de unde $n < 8$. Apoi, cum $n(a+1)(b+1)(c+1) = (2a+1)(2b+1)(2c+1)$ şi membrul drept este impar, rezultă că şi membrul stâng este impar, deci n este impar (iar a, b, c pare). Prin urmare singurele numere naturale care se pot, eventual, scrie sub forma dorită sunt 1, 3, 5 şi 7.
În continuare vom demonstra că fiecare din aceste numere se poate scrie sub forma dorită:

- $1 = \dfrac{2a+1}{a+1} \cdot \dfrac{2b+1}{b+1} \cdot \dfrac{2c+1}{c+1}$, cu $a = b = c = 0$,
- $3 = \dfrac{2a+1}{a+1} \cdot \dfrac{2b+1}{b+1} \cdot \dfrac{2c+1}{c+1}$, cu $a = 0$, $b = 2$, $c = 4$ (adică $3 = 1 \cdot \dfrac{5}{3} \cdot \dfrac{9}{5}$),
- $5 = \dfrac{2a+1}{a+1} \cdot \dfrac{2b+1}{b+1} \cdot \dfrac{2c+1}{c+1}$, cu $a = b = 2$, $c = 4$ (adică $5 = \dfrac{5}{3} \cdot \dfrac{5}{3} \cdot \dfrac{9}{5}$),
- $7 = \dfrac{2a+1}{a+1} \cdot \dfrac{2b+1}{b+1} \cdot \dfrac{2c+1}{c+1}$, cu $a = 6$, $b = 11$, $c = 21$ (adică $7 = \dfrac{13}{7} \cdot \dfrac{25}{13} \cdot \dfrac{49}{25}$).

(Ultima scriere o putem găsi căutând o scriere de forma $n = \dfrac{2a+1}{a+1} \cdot \dfrac{4a+1}{2a+1} \cdot \dfrac{8a+1}{4a+1}$.)

În concluzie, numerele naturale care se scriu ca produs de 3 fracţii de forma dorită sunt $1, 3, 5$ şi 7.

Observaţie: Această problemă este de fapt un caz particular al problemei 3 de la OIM 1998. Problema avea următorul enunţ:
Pentru orice număr natural nenul n, notăm cu $\tau(n)$ numărul divizorilor săi pozitivi (inclusiv 1 şi n). Determinaţi toate numerele naturale nenule care m pentru care există un număr natural nenul n astfel încât $\frac{\tau(n^2)}{\tau(n)} = m$.

Într-adevăr, dacă $n = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdot \ldots \cdot p_j^{a_j}$, unde $p_1, p_2, \ldots, p_j$ sunt numere prime distincte, iar $a_i \in \mathbb{N}$, atunci $\tau(n) = (a_1+1)(a_2+1) \cdot \ldots \cdot (a_j+1)$, iar $\tau(n^2) = (2a_1+1)(2a_2+1) \cdot \ldots \cdot (2a_j+1)$. Prin urmare, condiţia $\frac{\tau(n^2)}{\tau(n)} = m$ revine la $m = \dfrac{2a_1+1}{a_1+1} \cdot \dfrac{2a_2+1}{a_2+1} \cdot \ldots \cdot \dfrac{2a_j+1}{a_j+1}$, adică la a-l scrie pe m ca produs de numere de forma $\dfrac{2k+1}{k+1}$ cu $k \in \mathbb{N}$.

În general, se poate arăta că orice număr impar mai mic decât 2^j poate fi scris ca produs de j fracţii de forma $\dfrac{2k+1}{k+1}$.