

METODE DE REZOLVARE A PROBLEMELOR DE ARITMETICĂ

ABSTRACT. Articolul de față prezintă mai multe metode de rezolvare a problemelor de aritmetică; metoda mersului invers, metoda falsei ipoteze, metoda comparației și metoda grafică.

Lecția se adresează clasei a V-a.

Autor: Ion Cicu, Profesor, Școala gimnazială nr. 96, București

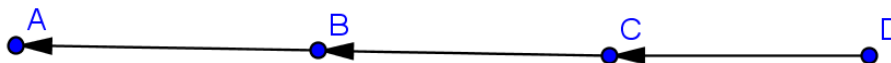
I. Metoda mersului invers

Într-o problema care se va putea rezolva prin metoda mersului invers datele problemei sunt astfel prezentate încât se exprimă una în raport cu alta. De exemplu, dacă datele problemei sunt A, B, C, D , atunci A este legat de B , B este legat de C , C este legat de D , iar D este cunoscut.

Legătura poate fi exprimată schematic așa:



iar la rezolvare mersul este invers, ca în figura de mai jos.

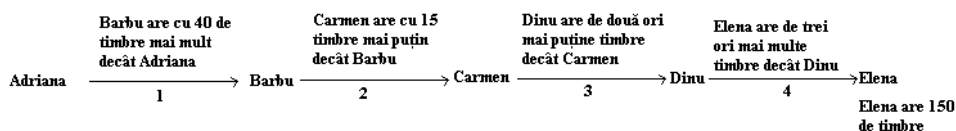


Iată un exemplu de problemă care se va rezolva prin metoda mersului invers:

Problema I.1: Barbu are cu 40 de timbre mai mult decât Adriana, Carmen are cu 15 timbre mai puțin decât Barbu, Dinu are de două ori mai

puține timbre decât Carmen, Elena are de trei ori mai multe timbre decât Dinu, adică 150 de timbre. Câte timbre are fiecare copil?

Soluție: Problema se poate reprezenta ca în figura de mai jos.

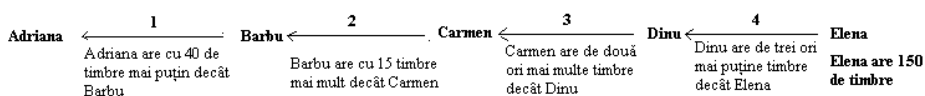


Să observăm că numărul de timbre al fiecărui copil este exprimat în raport cu numărul de timbre al altui copil.

Așa cum spune și numele metodei (mersul invers) putem inversa sensul săgeților.

În această situație se modifică și afirmațiile prin care numărul timbrelor fiecărui copil sunt legate de numărul timbrelor altui copil.

Modul în care se schimbă aceste afirmații îl vedeți în figura următoare.



În acest fel problema devine foarte ușoară. Din enunț se știe că Elena are 150 de timbre, iar din afirmația 4, așa cum a fost transformată de noi, se știe că "Dinu are de trei ori mai puține timbre decât Elena". Așadar, numărul de timbre pe care îl are Dinu va fi:

$$150 : 3 = 50 \text{ (timbre)}$$

Cunoaștem acum numărul de timbre pe care îl are Dinu, iar afirmația 3, transformată de noi ne spune: "Carmen are de două ori mai multe timbre decât Dinu". Atunci, numărul de timbre pe care îl are Carmen va fi:

$$50 \times 2 = 100 \text{ (timbre)}$$

Mai departe, se știe că "Barbu are cu 15 timbre mai mult decât Carmen", iar noi am aflat despre Carmen că are 100 de timbre. Atunci, Barbu va avea

$$100 + 15 = 115 \text{ (timbri)}$$

În sfârșit, din afirmația 1 se știe că "Adriana are cu 40 de timbre mai puțin decât Barbu", iar noi am aflat că Barbu are 115 timbre. Așadar, numărul de timbre pe care îl are Adriana va fi:

$$115 - 40 = 75 \text{ (timbri)}$$

În concluzie, Adriana are 75 de timbre, Barbu are 115 timbre, Carmen are 100 de timbre, Dinu are 50 de timbre și Elena are 150 de timbre așa cum știam de la început.

Metoda mersului invers se poate folosi cu succes și pentru a rezolva următorul tip de problemă:

Problema I.2: Aflați valoarea numărului x din egalitatea:

$$3 + 2 \times (x : 4 - 12) = 15$$

Soluție: Pentru rezolvare gândim astfel: " $2 \times (x : 4 - 12)$ " reprezintă un număr pe care îl notăm A și atunci relația devine:

$$3 + A = 15$$

De aici este evident că

$$A = 15 - 3$$

adică

$$A = 12$$

Amintindu-ne cine era A , avem

$$2 \times (x : 4 - 12) = 12$$

Acum, paranteza " $x : 4 - 12$ " o considerăm un număr pe care îl notăm, de exemplu, P și astfel ultima relație se va scrie:

$$2 \times P = 12$$

De aici avem evident

$$P = 6$$

Cum $P = x : 4 - 12$ vom avea

$$x : 4 - 12 = 6$$

Dacă vom nota numărul $x : 4$ cu B relația anterioară se va scrie:

$$B - 12 = 6$$

de unde

$$B = 18$$

adică

$$x : 4 = 18$$

În sfârșit, din această ultimă relație găsim

$$x = 18 \times 4$$

adică

$$x = 72$$

II. Metoda falsei ipoteze

Există mai multe tipuri de probleme a căror rezolvare se face prin metoda falsei ipoteze. Această metodă constă în a presupune că cerința problemei nu este cea corectă și transformarea ei într-o ipoteză nouă. Cel mai bine ar fi să ilustrăm acest lucru cu câteva exemple reprezentative.

Problema II.1: În ograda unui țăran sunt găini și porci. Numărul capetelor este 20, iar numărul picioarelor este 50. Câte găini și câți porci sunt în ogradă?

Soluție: Cerința problemei este de a afla numărul de găini și numărul de porci. Asta înseamnă că în ogradă sunt și găini și porci. Noi vom presupune că în ogradă avem numai porci sau numai găini. Trebuie să alegem una dintre situații. Să zicem că în ogradă sunt numai porci. Astfel am adăugat ipoteza: "În ogradă sunt 20 de porci", deoarece sunt 20 de capete.

Atunci, fiind 20 de capete, numărul de picioare va fi:

$$20 \times 4 = 80$$

Dar în problemă se spune că sunt 50 de picioare. Ne punem întrebarea: " De unde apare diferența dintre 80 și 50, adică 30 de picioare?"

Înseamnă că în ogradă sunt și găini nu numai porci.

Cum între numărul de picioare al unei găini și numărul de picioare al unui porc avem o diferență de 2 picioare, înseamnă că la fiecare găină am numărat 2 picioare în plus. Deci diferența de 30 de picioare vine de la numărul de găini. Dacă la fiecare găină am numărat 2 picioare în plus, atunci numărul de găini va fi:

$$30 : 2 = 15$$

Deoarece în ogradă sunt 20 de capete, iar 15 sunt capete de găină rezultă că numărul de porci va fi:

$$20 - 15 = 5$$

În concluzie, în ogradă sunt 15 găini și 5 porci.

Pentru cei care locuiesc la bloc problema ar putea fi formulată astfel:

Problemă: Pe o scară de bloc sunt 20 de apartamente cu două și cu patru camere. În total, pe scară, sunt 50 de camere. Câte apartamente cu două camere și câte apartamente cu patru camere sunt pe scara blocului?

Rezolvarea acestei probleme se face la fel ca la problema de mai sus numai că în loc de porci și găini avem apartamente cu două sau patru camere.

Problema II.2: Suma a șapte numere naturale, diferite de zero, este 27. Arătați că cel puțin două dintre numere sunt egale.

Soluție: Problema cere să arătăm că între cele șapte numere, două sunt egale. Noi vom presupune că toate cele șapte numere sunt diferite. Mai mult, vom presupune că ele sunt cele mai mici șapte numere naturale consecutive, adică 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.

Suma acestor numere este:

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 28$$

Dar în problemă se spune că suma celor șapte numere este 27.

Ne întrebăm: " De unde apare diferența de 1 între cele două sume?" Înseamnă că unul dintre numerele: 2, 3, 4, 5, 6 sau 7 trebuie să fie mai mic cu 1. Dacă 2 ar fi cu 1 mai mic el ar deveni 1. Dar noi mai aveam un 1, deci două dintre numere ar fi egale. Dacă 3 ar fi mai mic cu 1 el ar deveni 2. Dar noi mai avem un 2, deci iarăși am avea două numere egale. Același lucru s-ar întâmpla și atunci când 4, 5, 6 sau 7 ar fi mai mic cu 1. În concluzie, pentru ca suma să fie 27 trebuie să avem două numere egale.

Problema II.3 Într-o urnă avem 7 bile albe și 9 bile roșii. Care este cel mai mic număr de bile pe care trebuie să îl extragem din urnă, fără a ne uita la ele, pentru a fi siguri că am scos o bilă albă?

Soluție: De această dată, falsă ipoteză înseamnă să ne gândim la cea mai proastă situație care se poate întâmpla.

În problema noastră trebuie să scoatem din urnă o bilă albă. În urnă există bile și de altă culoare decât albă. Atunci situația cea mai proastă înseamnă să scoatem bile de orice culoare, dar nu de culoare albă.

În acest fel vom scoate mai întâi cele 9 bile negre. După cele 9 extrageri în urnă au rămas numai bile albe. Asta înseamnă că la următoarea extragere voi avea sigur o bilă albă.

În concluzie, numărul minim de extrageri, pentru a fi siguri că am scos o bilă albă, este 10.

III. Metoda comparației

În multe probleme, relațiile dintre mărimi sunt date explicit: cu atât mai mult, cu atât mai puțin, de atâtea ori mai mult sau de atâtea ori mai puțin. În alte cazuri aceste relații se deduc din compararea a două situații diferite. Despre aceste probleme spunem că le rezolvăm prin metoda comparației.

În rezolvarea unei probleme prin metoda comparației esențial este să vedem care este cauza care duce la diferențierea celor două situații. Dar cel mai bine este să luăm un exemplu.

Problema III.1: Pentru a cumpăra 7 caiete și 3 pixuri s-au plătit 23 de lei, iar pentru cumpărarea a 7 caiete și 8 pixuri de același fel s-au plătit 38 de lei. Care este prețul unui caiet?

Soluție: În ambele situații se vorbește despre caiete și pixuri. Pentru a putea sesiza mai ușor unde apar diferențele vom așeza problema astfel:

| | | |
|----------|---------------|-------------|
| 7 caiete |3 pixuri |23 lei |
| 7 caiete |8 pixuri |38 lei |

Privind cu atenție constatăm că diferența dintre sumele de bani provine din diferența numărului de pixuri. Astfel putem afirma că 5 pixuri ($8 - 3$) costă 15 lei ($38 - 23$). Atunci, un pix costă 3 lei ($15 : 5$).

Pentru a afla cât costă un caiet folosim afirmația: " pentru 7 caiete și 3 pixuri s-au plătit 23 de lei".

Cum pentru un pix s-a plătit 3 lei, înseamnă că pentru 3 pixuri s-a plăti

$$3 \times 3 = 9 \text{ (lei)}$$

Atunci, pentru 7 caiete s-a plătit

$$23 - 9 = 14 \text{ (lei)}$$

Dacă 7 caiete costă 14 lei, atunci un caiet costă

$$14 : 7 = 2 \text{ (lei)}.$$

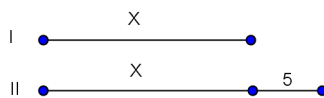
IV. Metoda grafică

Metoda grafică presupune să înlocuim diferitele mărimi care apar în problemă cu segmente și apoi să interpretăm desenul obținut.

Cel mai important lucru la această metodă este să știm să transpunem enunțul în figură și apoi să interpretăm figura astfel încât să ajungem la părți egale. Pentru aceasta o să prezentăm câteva situații care apar mai des în astfel de probleme.

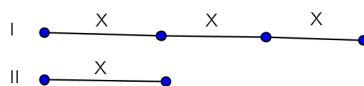
Enunțul 1: Al doilea număr este cu 5 mai mare decât primul număr.

Figura asociată:



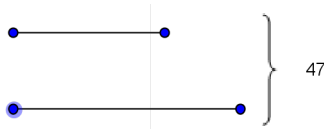
Enunțul 2: Primul număr este de trei ori mai mare decât al doilea.

Figura asociată:



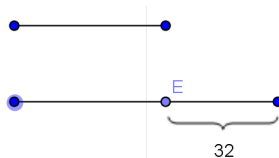
Enunțul 3: Suma a două numere este 47.

Figura asociată:



Enunțul 4: Diferența a două numere este 32.

Figura asociată:



Interpretarea figurii obținute trebuie să ne conducă la părți egale.

Dacă în figura asociată Enunțului 1 îl ignorăm pe 5 avem două părți egale.

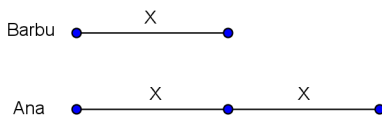
Din figura asociată Enunțului 2 se observă că avem patru părți egale.

Să rezolvăm acum o problemă folosind această metodă.

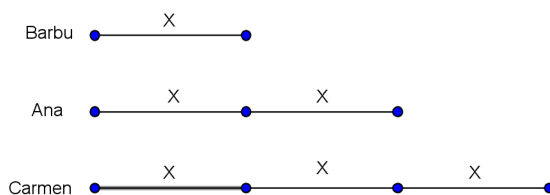
Problema IV.1: Ana, Barbu și Carmen au fiecare câte o sumă de bani. Împreună Ana și Barbu au cât Carmen. Ana are o sumă de bani de două ori mai mare ca Barbu. Barbu și Carmen au împreună 20 lei. Ce sumă de bani are fiecare?

Soluție: Recitind cu atenție problema constatăm că este bine să ordonăm informațiile puțin altfel. Mai întâi să folosim informația "Ana are o sumă de bani de două ori mai mare decât Barbu".

Aceasta se reprezintă ca în desenul de mai jos.

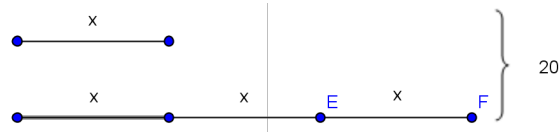


Să adăugăm acum informația "Împreună Ana și Barbu au cât Carmen."



În sfârșit, să folosim și informația "Barbu și Carmen au împreună 20 lei."

7



Ultimul desen arată patru părți egale care reprezintă suma de bani pe care o are Barbu.

Așadar, Barbu are

$$20 : 4 = 5 \text{ (lei)}$$

În continuare lucrurile sunt simple. Ana are

$$5 \cdot 2 = 10 \text{ (lei)}$$

iar Carmen are

$$5 + 10 = 15 \text{ (lei)}$$

În concluzie, Ana are 10 lei, Barbu are 5 lei, iar Carmen are 15 lei.