

Clasa a X-a - Etapa 2 - Problema 4

Enunț. Fie $a, b, c \in (0, \infty)$ astfel încât $a + b + c = 3$. Demonstrați că

$$\log_3(1 + a + b) \cdot \log_3(1 + a + c) \cdot \log_3(1 + b + c) \leq 1.$$

Soluție. Avem

$$\begin{aligned} & \sqrt[3]{\log_3(1 + a + b) \cdot \log_3(1 + a + c) \cdot \log_3(1 + b + c)} \\ & \leq \frac{\log_3(1 + a + b) + \log_3(1 + a + c) + \log_3(1 + b + c)}{3} \\ & \leq \log_3 \frac{(1 + a + b) + (1 + a + c) + (1 + b + c)}{3} \\ & = 1, \end{aligned}$$

de unde obținem concluzia. □