Problema 2. **Problema 2.** Fie $x \in \mathbb{R}$. Demonstraţi că, dacă numerele $a = x^3 - x$ şi $b = x^2 + 1$ sunt raţionale, atunci x este raţional.

Soluţie: Dacă $x = 0$ nu avem ce demonstra. Pentru $x \neq 0$, atunci avem $\frac{a^2}{x^2} = \left(x^2 - 1\right)^2$ şi $b^2 = \left(x^2 + 1\right)^2$, adică

$$b^2 - \frac{a^2}{x^2} = 4x^2 = 4(b-1),$$

de unde $(b-2)^2 = \frac{a^2}{x^2}$.

Pentru $b = 2$ obţinem $a = 0$ şi deci $x \in \{-1; 0; 1\} \subset \mathbb{Q}$.

Dacă $b \neq 2$, atunci rezultă $x^2 = \frac{a^2}{(b-2)^2}$, de unde $|x| = \left|\frac{a}{b-2}\right| \in \mathbb{Q}$, adică $x \in \mathbb{Q}$.