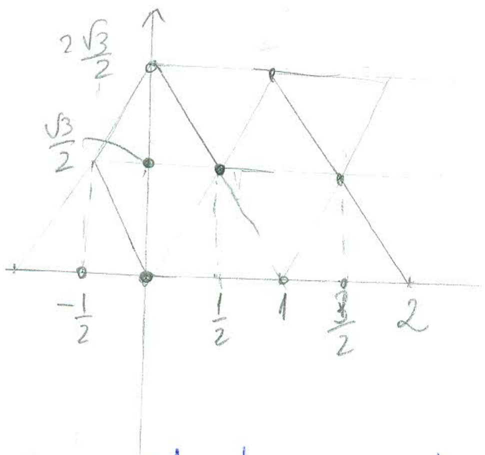
Etapa 1, Problema 2.

rețea de Δ echilaterale
a, b – 2 distanțe
+
~~a,~~ $ab \to$ tot distanțe
$\sqrt{1981} \to$ distanțe?
—+

Atașăm planului un sistem de coordonate astfel:



Observăm că toate punctele au coordonate de tip $A\left(\frac{a}{2}, \frac{b\sqrt{3}}{2}\right)$, $a, b \in \mathbb{Z}$.

(obs: evident, această corespondență [illegible] de la mulțimea vârfurilor Δ la mult. perechilor (a, b) de nr întregi este bijectivă).

Fie a distanța între 2 puncte A și B, respectiv b distanța dintre C și D.

$A\left(\frac{x_1}{2}, \frac{y_1\sqrt{3}}{2}\right)$
$B\left(\frac{x_2}{2}, \frac{y_2\sqrt{3}}{2}\right)$ $\Rightarrow a = \sqrt{\frac{(x_1-x_2)^2+3(y_1-y_2)^2}{4}}$

$C\left(\frac{x_3}{2}, \frac{y_3\sqrt{3}}{2}\right)$
$D\left(\frac{x_4}{2}, \frac{y_4\sqrt{3}}{2}\right)$ $\Rightarrow b = \sqrt{\frac{(x_3-x_4)^2+3(y_3-y_4)^2}{4}}$

$\Rightarrow$ observăm că dist. dintre 2 puncte oarecare sunt de forma: $d=\sqrt{\frac{A^2+3B^2}{4}}$, $A,B\in\mathbb{Z}$.

$\Rightarrow$ dem. că și distanța ab este de aceeași formă: $a=\sqrt{\frac{(x_1-x_2)^2+3(y_1-y_2)^2}{4}}=\sqrt{\frac{x^2+3y^2}{4}}$

$b=\sqrt{\frac{(x_3-x_4)^2+3(y_3-y_4)^2}{4}}=\sqrt{\frac{z^2+3t^2}{4}}$

$\Rightarrow ab=\sqrt{\frac{(x^2+3y^2)(z^2+3t^2)}{16}}=\sqrt{\frac{x^2z^2+3x^2t^2+3y^2z^2+9y^2t^2}{16}}$

$=\sqrt{\frac{\left(\frac{xz-3yt}{2}\right)^2+3\left(\frac{zy+xt}{2}\right)^2}{4}}=\sqrt{\frac{A^2+3B^2}{4}}$

$\Rightarrow$ ~~AB~~ ab este distanță - q.ed.

$\sqrt{1981}=\sqrt{7\cdot 283}$

$$\left.\begin{array}{l}\sqrt{7}=\sqrt{2^2+3\cdot 1^2}=\sqrt{\frac{4^2+3\cdot 2^2}{4}}\\ \sqrt{283}=\sqrt{16^2+3\cdot 3^2}=\sqrt{\frac{32^2+3\cdot 6^2}{4}}\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$\sqrt{7}, \sqrt{283}\to$ distanțe între 2 puncte $\Rightarrow \sqrt{7}\cdot\sqrt{283}=\sqrt{1981}$ distanță $\Rightarrow$ q.ed.
(aplicând prima parte)