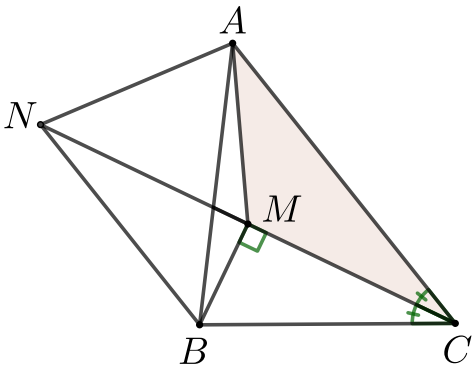
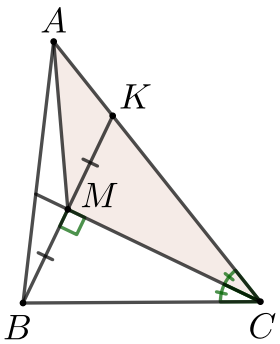
Problema 3.
Fie ABC un triunghi de arie 1. Notăm cu M piciorul perpendicularei din B pe bisectoarea unghiului C. Determinaţi aria triunghiului AMC.

Olimpiada de geometrie „I. F. Sharygin”, 2009

Soluţia 1: (oficială) Paralela prin B la AC intersectează bisectoarea unghiului C în punctul N. Cum $\sphericalangle BNC \equiv \sphericalangle ACN \equiv \sphericalangle BCN$, triunghiul BCN este isoscel, iar $[BM]$ este mediană în acest triunghi. Atunci $\mathcal{A}_{AMC} = \frac{1}{2}\mathcal{A}_{ANC} = \frac{1}{2}\mathcal{A}_{ABC} = \frac{1}{2}$. (Triunghiurile ANC şi ABC sunt echivalente deoarece au aceeaşi bază, $[AC]$, iar înălţimile corespunzătoare acesteia sunt congruente pentru că $BN \parallel AC$.)



Soluţia 2:
Dacă $\{K\} = BM \cap AC$, atunci în triunghiul BCK segmentul $[CM]$ va fi bisectoare şi înălţime, deci şi mediană. Aşadar M este mijlocul lui $[BK]$, astfel că $\mathcal{A}_{BMC} = \mathcal{A}_{KMC}$ şi $\mathcal{A}_{BMA} = \mathcal{A}_{KMA}$. Prin adunare obţinem că $\mathcal{A}_{AMC} = \mathcal{A}_{BMC} + \mathcal{A}_{BMA} = \mathcal{A}_{ABC} - \mathcal{A}_{AMC}$, de unde $\mathcal{A}_{AMC} = \frac{1}{2}\mathcal{A}_{ABC} = \frac{1}{2}$.



Soluţia 3: (o a doua soluţie oficială, mai scurtă, dar care depăşeşte nivelul clasei a VII-a)
Cum $\mathcal{A}_{AMC} = \frac{1}{2}AC \cdot CM \sin\frac{C}{2}$ şi $CM = BC\cos\frac{C}{2}$, avem $\mathcal{A}_{AMC} = \frac{1}{2}AC \cdot BC \sin\frac{C}{2} \cdot \cos\frac{C}{2} = \frac{1}{4}AC \cdot BC \sin C = \frac{1}{2}\mathcal{A}_{ABC} = \frac{1}{2}$.