P1. Fie $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, oarecare fixat, iar şirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definit prin $a_0 = 0$ şi

$$a_n = a_{\left[\frac{n}{k}\right]} + \left[\frac{n}{k}\right] \quad , (\forall) n \in \mathbb{N}^*.$$

Calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{n}$.

S. Arătăm în primul rând că pentru orice $t \in \mathbb{N}$ şi $k^t \leq n < k^{t+1}$ are loc

$$a_n = \left[\frac{n}{k}\right] + \left[\frac{n}{k^2}\right] + \ldots + \left[\frac{n}{k^t}\right].$$

Într-adevăr, dacă $1 = k^0 \leq n < k$, atunci $a_n = a_{\left[\frac{n}{k}\right]} + \left[\frac{n}{k}\right] = a_0 + 0 = 0$, deci afirmaţia este edvărată pentru $t = 0$. Presupunând acum afirmaţia adevărată pentru un $t \in \mathbb{N}$ oarecare, dacă $k^{t+1} \leq n < k^{t+2}$, atunci $k^t \leq \left[\frac{n}{k}\right] < k^{t+1}$, astfel că

$$a_n = a_{\left[\frac{n}{k}\right]} + \left[\frac{n}{k}\right] = \sum_{m=1}^{t} \left[\frac{1}{k^m} \cdot \left[\frac{n}{k}\right]\right] + \left[\frac{n}{k}\right] = \sum_{m=1}^{t+1} \left[\frac{n}{k^m}\right].$$

(Am folosit faptul că $\left[\frac{[x]}{p}\right] = \left[\frac{x}{p}\right]$, $(\forall) x \in \mathbb{R}, p \in \mathbb{N}^*$.) Prin urmare, avem că

$$a_n = \sum_{m=1}^{[log_k(n)]} \left[\frac{n}{k^m}\right] \quad , (\forall) n \in \mathbb{N}^*.$$

Dar atunci,

$$\sum_{m=0}^{[log_k(n)]} \frac{1}{k^m} - \frac{[log_k(n)]}{n} < \frac{a_n}{n} \leq \sum_{m=1}^{[log_k(n)]} \frac{1}{k^m} \quad , (\forall) n \in \mathbb{N}^*,$$

şi cum $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{m=1}^{[log_k(n)]} \frac{1}{k^m} = \frac{1}{k-1}$, iar $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{[log_k(n)]}{n} = 0$, rezultă că

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = \frac{1}{k-1}.$$