Problema 1. Determinaţi numerele naturale n, mai mari ca 1, pentru care are loc egalitatea

$$\left[\frac{n}{1}\right]+\left[\frac{n}{2}\right]+\ldots+\left[\frac{n}{n}\right]=2+\left[\frac{n-1}{1}\right]+\left[\frac{n-1}{2}\right]+\ldots+\left[\frac{n-1}{n-1}\right].$$

Olimpiadă Iugoslavia, 1988

Soluţie:
Evident, $n=2$ verifică egalitatea din enunţ. În continuare, presupunem $n\geq 3$.
Deoarece $\left[\frac{n}{1}\right]=n$, $\left[\frac{n}{n}\right]=1$ şi $\left[\frac{n-1}{1}\right]=n-1$, relaţia din enunţ se scrie echivalent

$$\left[\frac{n}{2}\right]+\left[\frac{n}{3}\right]+\ldots+\left[\frac{n}{n-1}\right]=\left[\frac{n-1}{2}\right]+\left[\frac{n-1}{3}\right]+\ldots+\left[\frac{n-1}{n-1}\right].$$

Pentru fiecare $k\in\{2,3,\ldots,n-1\}$ are loc inegalitatea

$$\left[\frac{n}{k}\right]\geq\left[\frac{n-1}{k}\right],$$

aşa încât, pentru ca egalitatea din enunţ să aibă loc, este necesar (şi suficient) să avem $\left[\frac{n}{k}\right]=\left[\frac{n-1}{k}\right]$ pentru orice k. Deoarece numerele $\left[\frac{n}{k}\right]$ şi $\left[\frac{n-1}{k}\right]$ reprezintă câtul împărţirii cu rest a lui n, respectiv $n-1$, la k, egalitatea precedentă spune că n nu este divizibil cu k. Aşadar, numerele căutate sunt acele numere n care nu sunt divizibile cu niciunul din numerele $2,3,\ldots,n-1$, adică numerele prime.