Clasa a X-a - Etapa 4 - Problema 4

Enunţ. *Detrminaţi funcţiile* $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *care verifică relaţia*

$$f(n) + f(n+1) = 2n + 1,$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

***

Soluţie. Alegând $n \to n+1$, obţinem $f(n+1) + f(n+2) = 2n + 3$. Prin scăderea egalităţii din enunţ suntem conduşi la

$$f(n+2) - f(n) = 2, \tag{1}$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Acum, $n = 0$, în enunţ, conduce la $f(0) + f(1) = 1$.

Dacă $f(0) = 0$ şi $f(1) = 1$, atunci (1) şi o inducţie de pas doi conduce la $f(n) = n$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Această funcţie verifică condiţia din enunţ.

Dacă $f(0) = 1$ şi $f(1) = 0$, atunci (1) şi o inducţie de pas doi conduce la $f(n) = n + 1$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, par şi $f(n) = n - 1$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, impar. Şi această funcţie verifică condiţia din enunţ. $\square$