Etapa 1, Problema 1

Fie a, b, c numere reale cu $0 < a \leq b \leq c < 1$. Comparaţi numerele $A = \log_b a + \log_c b + \log_a c$ şi $B = \log_a b + \log_b c + \log_c a$.

Ilie Diaconu

Soluţie.

Fie $x = \lg a, y = \lg b$ şi $z = \lg c$, cu $x \leq y \leq z < 0$; atunci $A = \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} = \frac{x^2z+y^2x+z^2y}{xyz}$ şi $B = \frac{y}{x} + \frac{z}{y} + \frac{x}{z} = \frac{y^2z+z^2x+x^2y}{xyz}$. Rezultă că $A - B = \frac{(x-y)(y-z)(z-x)}{xyz} \leq 0$, prin urmare $A \leq B$, cu egalitate când două dintre numerele a, b, c sunt egale.