Etapa 7, Problema 2

Demonstrați că nu există funcții $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ cu proprietatea că

$$f\left(f(n)\right)=n+2013\text{, oricare ar fi } n\in\mathbb{N}.$$

***

Soluție.

Presupunem că există o funcție având această proprietate. Folosind ipoteza, se demonstrează că funcția f este injectivă. De asemenea, este evident șirul de incluziuni $f\left(f(\mathbb{N})\right)\subset f(\mathbb{N})\subset\mathbb{N}$.

Fie $A=\mathbb{N}\setminus f(\mathbb{N})$ și $B=f(\mathbb{N})\setminus f\left(f(\mathbb{N})\right)$; avem că $A\cap B=\varnothing$ și $A\cup B=\mathbb{N}\setminus f\left(f(\mathbb{N})\right)$. Cum $f\left(f(\mathbb{N})\right)=\{2013,2014,2015,\ldots\}$, obținem $A\cup B=\{0,1,2,\ldots,2012\}$.

Demonstrăm că $f(A)=B$. Fie $x\in A$; atunci $f(x)\in\mathbb{N}$. Cum $x\notin f(\mathbb{N})$ și funcția este injectivă, deducem că $f(x)\notin f\left(f(\mathbb{N})\right)$. Rezultă că $f(x)\in\mathbb{N}\setminus f(\mathbb{N})$, prin urmare $f(A)\subset B$. Apoi, fie $y\in B$; avem că $y\in f(\mathbb{N})$, dar $y\notin f\left(f(\mathbb{N})\right)$. Există atunci $x\in\mathbb{N}$ astfel încât $f(x)=y$. Însă, oricare ar fi $x'\in f(\mathbb{N})$, avem $f(x')\neq y$. Deducem că $x\in\mathbb{N}\setminus f(\mathbb{N})=A$, deci $B\subset f(A)$, așadar $f(A)=B$.

Deoarece f este injectivă, obținem egalitatea $Card\,A=Card\,B$, care însă nu este posibilă, deoarece $Card(A\cup B)=2013$, iar mulțimile sunt disjuncte. Prin urmare, presupunerea este falsă, deci nu există funcții având proprietatea dorită.