P4. Fie $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ o funcţie cu proprietatea lui Darboux, $k > 0$ o constantă pozitivă oarecare, iar $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ o funcţie cu proprietatea că

$$|g(x) - g(y)| \leq k \cdot |f(x) - f(y)| \quad , (\forall) x, y \in \mathbb{R}.$$

Arătaţi că g are proprietatea lui Darboux.

S. Pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$ pentru care $f(x) = f(y)$ rezultă că $g(x) = g(y)$. Pentru orice $t \in Im(f)$ obţinem deci că funcţia g este constantă pe mulţimea $f^{-1}(t) = \{x \in \mathbb{R} | f(x) = t\}$. Prin urmare, putem defini o funcţie $\alpha : Im(f) \longrightarrow \mathbb{R}$, astfel încât $\alpha(f(x)) = g(x), (\forall) x \in \mathbb{R}$. Pentru orice $t, u \in Im(f)$, alegând $x \in f^{-1}(t)$ şi $y \in f^{-1}(u)$, avem atunci inegalitatea

$$|\alpha(t) - \alpha(u)| = |\alpha(f(x)) - \alpha(f(y))| = |g(x) - g(y)| \leq k \cdot |f(x) - f(y)| = |t - u|$$

şi rezultă că α este o funcţie continuă. Dar atunci g are proprietatea lui Darboux, fiind compusa $\alpha \circ f$ a unei funcţii continue cu o funcţie cu proprietatea lui Darboux.