Clasa a X-a - Etapa aV-a - Problema 4

Enunţ. *Se dau m numere naturale distincte din mulţimea $\{1, 2, ..., n\}$. Demonstraţi că putem alege câteva dintre ele, cu suma S, astfel încât*

$$0 \leq S - \frac{m(m+1)}{2} \leq n + \sqrt{2n} - m.$$

Soluţie. Fie $a_1 < a_2 < ... < a_m$ cele m numere date. Notăm cu j indicele minim pentru care

$$a_1 + a_2 + ... + a_j \geq \frac{m(m+1)}{2}$$

şi cu i indicele maxim pentru care

$$a_i + a_{i+1} + ... + a_j \geq \frac{m(m+1)}{2}.$$

Notând $S = a_i + a_{i+1} + ... + a_j$, este îndeplinită prima inegalitate.

Din maximalitatea lui i, avem

$$S \leq a_i + \frac{m(m+1)}{2} - 1. \tag{1}$$

Din minimalitatea lui j, deducem că

$$a_1 + a_2 + ... + a_{j-1} < \frac{m(m+1)}{2} \leq a_i + ... + a_{j-1} + a_j,$$

de unde

$$a_j > a_1 + ... + a_{i-1} \geq 1 + 2 + ... + (i-1) = \frac{i(i-1)}{2}.$$

Dar $n \geq a_j$, şi prin urmare $i < \sqrt{2n} + 1$. Rezultă că

$$a_i \leq n - m + i < n - m + \sqrt{2n} + 1. \tag{2}$$

Din relaţiile (1) şi (2) obţinem că, pentru S, este îndeplinită (strict) şi a doua inegalitate din enunţ. □