Problema 4. Se consideră un tetraedru. Stabiliţi dacă se pot scrie 10 numere naturale consecutive în cele 4 vârfuri şi în mijloacele celor 6 muchii ale tetraedrului astfel încât numărul scris în mijlocul fiecărei muchii să fie media aritmetică a numerelor scrise în vârfurile din capetele muchiei.

Caucasus Mathematical Olympiad, 2018

Soluţia 1:
În toate vârfurile trebuie scrise numere de aceeaşi paritate, altfel numărul de pe o muchie care uneşte două vârfuri cu etichete de parităţi diferite nu va fi etichetată cu un număr natural.
Aşadar, numerele scrise în cele patru vârfuri pot da numai două resturi diferite la împărţirea cu 4 (0 şi 2 sau 1 şi 3). Dispunem de 5 numere de fiecare paritate, 3 dintre ele dau un rest la împărţirea cu 4, celelalte două dau un alt rest. Astfel, din cele 4 numere din vârfuri, putem avea fie câte două care dau un acelaşi rest, fie trei numere care dau un anumit rest şi un alt număr care dă un alt rest (cu 2 mai mare sau cu 2 mai mic). Pe o muchie care are în capete etichete care dau acelaşi rest la împărţirea cu 4 se va scrie atunci un număr de aceeaşi paritate cu ele. Dar avem cel puţin două asemenea muchii, deci vom avea nevoie de cel puţin 6 etichete de aceeaşi paritate (4 pentru vârfuri şi încă cel puţin două pentru muchii). Ori dispunem de numai 5 numere de fiecare paritate, deci o etichetare precum cea cerută în enunţ nu este posibilă.

Soluţia 2:
Să presupunem că o asemenea etichetare este posibilă. Fie n numărul cel mai mare. Evident, n trebuie să stea într-un vârf (el nu poate fi media aritmetica a două numere mai mici). Numărul $n-1$ nu poate sta într-un alt vârf deoarece pe muchia care uneşte vârfurile etichetate cu n şi $n-1$ nu am scrie un număr natural. În plus, $n-1$ trebuie să stea pe muchia care uneşte vârfuri etichetate cu n şi $n-2$. Ne uităm acum la $n-3$. El nu poate sta într-un vârf (muchia care uneşte acest vârf cu vârful etichetat cu n nu ar avea eticheta naturală). Dacă stă pe o muchie care pleacă din $n-2$, atunci în celălalt capăt al muchiei am avea $n-4$, iar pe muchia care uneşte $n-4$ cu n ar trebui să refolosim eticheta $n-2$, contradicţie. Rezultă că $n-3$ trebuie să fie scris pe o muchie care pleacă din vârful etichetat cu n (altfel $n-3$ ar fi media aritmetică a două numere mai mici). Celălalt capăt al muchiei ar fi etichet cu $n-6$. Pe muchia care uneşte $n-6$ cu $n-2$ ar sta $n-4$. Atunci în ultimul vârf trebuie să punem $n-8$, dar atunci pe muchia care uneşte acest vârf cu cel etichetat cu n ar trebui să refolosim eticheta $n-4$. Am ajuns astfel la o contradicţie, deci o etichetare precum cea din enunţ nu este posibilă.

Soluţia 3:
Să presupunem că o asemenea etichetare este posibilă. În toate vârfurile trebuie

scrise numere de aceeaşi paritate, altfel numărul de pe o muchie care uneşte două vârfuri cu etichete de parităţi diferite nu va fi etichetată cu un număr natural.
Evident, numărul cel mai mare trebuie să stea într-un vârf (el nu poate fi media aritmetica a două numere mai mici).
Analog, numărul cel mai mic trebuie să stea într-un vârf.
Dar numărul cel mai mare şi numărul cel mai mic nu au aceeaşi paritate, deci o asemenea etichetare nu este posibilă.

Remarcă: Dacă o asemenea etichetare ar fi posibilă cu etichetele $n + 1$, $n + 2$, $\ldots$, $n + 10$, ea ar fi posibilă şi cu etichetele 1, 2, $\ldots$, 10: scăzând n din fiecare etichetă, numerele obţinute vor continua să satisfacă toate condiţiile din enunţ.