Problema 1.
a) Determinaţi numerele naturale n pentru care $2^{\frac{n}{2}} > n+1$.
b) Determinaţi numerele naturale nenule n pentru care

$$n = \log_2(1+n) + \log_3 n.$$

Lucian Dragomir

Soluţie. a) Se demonstrează prin inducţie că inegalitatea este adevărată dacă şi numai dacă $n \geqslant 6$.

b) Verificăm pentru $n \in \{1,2,3,4,5\}$ şi obţinem soluţiile $n=1$ şi $n=3$. Dacă $n \geqslant 6$, din a) deducem că $(n+1)^2 < 2^n$, deci $\log_2(n+1)^2 < n$. (1) Obţinem:

$$\log_2(n+1) + \log_3 n < \log_2(n+1) + \log_2 n < 2\log_2(n+1) = \log_2(n+1)^2 \overset{(1)}{<} n,$$

aşadar nu există soluţii în acest caz. În concluzie, $n \in \{1,3\}$.