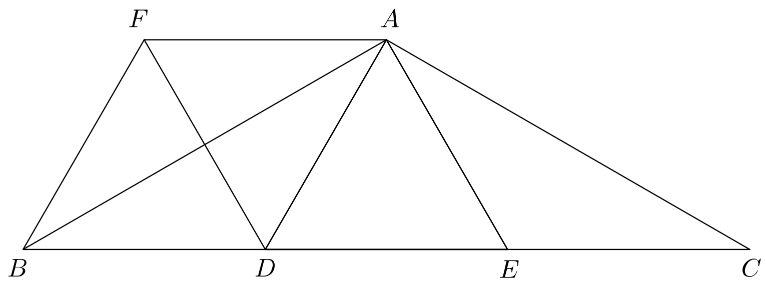
**Problema 4.** Fie triunghiul $ABC$ cu $AB = AC$. Pe latura $(BC)$ se consideră punctele $D$ şi $E$ astfel încât $BD = DE = EC$. Ştiind că măsura unghiului $\angle DAE$ este jumătate din măsura unghiului $\angle BAC$, aflaţi măsura unghiului $\angle BAC$.

*Leonard Giugiuc*

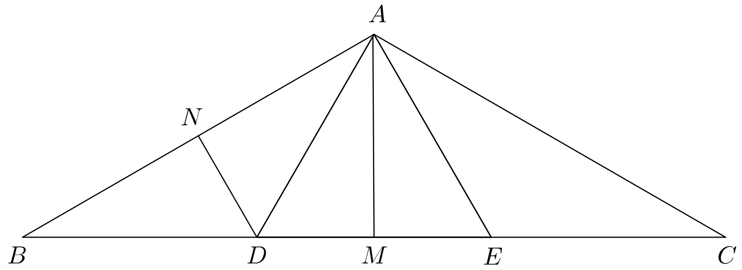
*Soluţia 1:*
Să observăm mai întâi că triunghiul $ABC$, fiind isoscel, are unghiurile de la bază congruente, apoi că triunghiurile $ABD$ şi $ACE$ sunt congruente (LUL).

Deducem că $m(\angle BAD) = m(\angle CAE) = \dfrac{m(\angle BAC)}{4} = \dfrac{m(\angle DAE)}{2}$.

Fie $F$ simetricul lui $D$ faţă de $AB$. Avem atunci că $AF = AD = AE$ şi $m(\angle FAB) = m(\angle DAB)$, deci $m(\angle FAD) = 2m(\angle BAD) = m(\angle DAE)$. Triunghiurile $FAD$ şi $DAE$ sunt congruente (LUL), de unde $DF = DE = BD = BF$, deci triunghiul $BDF$ este echilateral. Rezultă de aici că $m(\angle ABD) = 30°$, deci $m(\angle BAC) = 120°$.




*Soluţia 2:*
Ca în soluţia de mai sus se arată că $m(\angle BAD) = m(\angle CAE) = \dfrac{m(\angle BAC)}{4} = \dfrac{m(\angle DAE)}{2}$. Fie $M$ mijlocul lui $[DE]$, iar $N$ proiecţia lui $D$ pe $AB$. Atunci triunghiurile dreptunghice $AND$ şi $AMD$ sunt congruente (IU), deci $DN = DM = \dfrac{DE}{2} = \dfrac{BD}{2}$. În triunghiul dreptunghic $BDN$, cateta $DN$ are lungimea jumătate din lungimea ipotenuzei $BD$, deci $m(\angle NBD) = 30°$, prin urmare, $m(\angle BAC) = 120°$.



*Soluţia 3:* (pentru cine ştie deja teorema bisectoarei)
Ca în soluţia 1 se arată că $m(\angle BAD) = m(\angle CAE) = \dfrac{m(\angle BAC)}{4} = \dfrac{m(\angle DAE)}{2}$ şi că $\Delta BAD \equiv \Delta CAE$. Rezultă că $AD = AE$. Fie $M$ mijlocul lui $[DE]$. Triunghiul $DAE$ fiind isoscel, mediana $AM$ este înălţime şi bisectoare, deci unghiurile $BAD, DAM, MAE, EAC$ sunt congruente, adică $(AD, (AE$ sunt bisectoarele unghiurilor $\angle BAM$, respectiv $\angle CAM$. Din teorema bisectoarei rezultă că $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{DM}{DB} = \dfrac{1}{2}$ (deoarece $DM = \dfrac{1}{2}DE = \dfrac{1}{2}BD$). Rezultă că în triunghiul dreptunghic $BAM$ cateta $AM$ este jumătate din ipotenuza $AB$, deci $m(\angle ABM) = 30°$, de unde $m(\angle BAC) = 120°$.

*Soluţia 4:* (*Alexandra Hirsch, Alex Claudiu Deac*)
Fie $F$ proiecţia lui $A$ pe $BC$ şi $P$ simetricul lui $A$ faţă de $BC$. Atunci triunghiul $ABP$ este isoscel cu $BA = BP$, deci $[BF]$ este mediană. Cum $D$ este punctul de pe această mediană care este la două treimi de vârf şi o treime de bază, $D$ este centrul de greutate al acestui triunghi. Pe de altă parte, ca în soluţia 1 se arată că $(AD$ este bisectoarea unghiului $BAP$, deci triunghiul $ABP$ este echilateral. De aici este imediat că $m(\angle A) = 2m(\angle PAB) = 120°$.