Clasa a IX-a - Etapa I - Problema 4 - Soluţie

Enunţ. Fie ABC, un triuinghi cu proprietatea $a \neq b \neq c \neq a$. Demonstraţi că dreapta IG intersectează segmentele (AB) şi (AC) dacă şi numai dacă există $t \in (0,1)$ cu proprietatea $a = tb + (1-t)\,c$.

Proof. Pentru prima parte, notăm M, N, intersecţia dreptei IG cu segmentele (AB) şi (AC). Fie BE, CF bisectoare şi BV, CU mediane.

Teorema lui Menelaos conduce la egalităţile $\frac{MB}{MA} + \frac{NC}{NA} = 1$ şi $\frac{MB}{MA} \cdot \frac{AF}{BF} + \frac{NC}{NA} \cdot \frac{AE}{CE} = 1$. Cu notaţia $\frac{NC}{NA} = t$, atunci $\frac{MB}{MA} = 1 - t$ şi obţinem

$$(1-t) \cdot \frac{AF}{BF} + t \cdot \frac{AE}{CE} = 1.$$

Teorema bisectoarei conduce la

$$t \cdot \frac{c}{a} + (1-t) \cdot \frac{b}{a} = 1,$$

de unde obţinem concluzia.

Reciproc, presupunem prin reducere la absurd $IG \cap (AB) = \varnothing$. Cazul $IG \cap (AC) = \varnothing$ este similar. Atunci $IG \cap (BC) \neq \varnothing$ şi $IG \cap (AC) \neq \varnothing$. Aplicând raţionamentul anterior, există $s \in (0,1)$ pentru care $c = sa + (1-s)\,b$. Dar $a = tb + (1-t)\,c$, de unde

$$a = tb + (1-s)\,sa + (1-t)\,(1-s)\,b.$$

Calculul conduce la $a = b$, ceea ce nu este posibil. $\square$