Problema 2
Etapa 6

Clasa a IX – a

**Problema 2.** Determinaţi cel mai mare număr raţional *p*, pentru care inegalitatea

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{n^2}+\frac{p}{n}\le\frac{7}{4}$$

este adevărată pentru orice număr natural $n\ge 3$.

*Dorel Miheţ, Timişoara*

Soluţie:

○ Pentru $n=3$ se obţine $p\le\frac{7}{6}$ şi arătăm că valoarea cerută este chiar $p=\frac{7}{6}$.

Este suficient să demonstrăm că $s_n=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{n^2}+\frac{7}{6n}\le\frac{7}{4},\forall n\ge 3, n\in\mathbb{N}$.

○ Deoarece $s_{n+1}-s_n<0$, adică şirul $(s_n)$ este strict descrescător, iar $s_3\le\frac{7}{4}$, deducem că $s_n\le\frac{7}{4},\forall n\ge 3, n\in\mathbb{N}$.