Etapa 5, Problema 2

Se consideră triunghiurile $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$ şi $A_3B_3C_3$, care au centrele de greutate necoliniare. Demonstraţi că există un unic punct M în planul triunghiurilor având proprietatea că

$$MA_1^2 + MB_1^2 + MC_1^2 = MA_2^2 + MB_2^2 + MC_2^2 = MA_3^2 + MB_3^2 + MC_3^2 .$$

***

Soluţie.

Fie G_1, G_2, G_3 centrele de greutate ale celor trei triunghiuri, iar M un punct din plan care are proprietatea din enunţ. Folosind relaţia lui Leibniz, obţinem

$$MA_1^2 + MB_1^2 + MC_1^2 = 3MG_1^2 - \frac{1}{9}\left(A_1B_1^2 + B_1C_1^2 + C_1A_1^2\right).$$

De aici rezultă că diferenţa $MG_1^2 - MG_2^2$ este constantă, prin urmare M aparţine unei drepte a care este perpendiculară pe G_1G_2. Analog, diferenţa $MG_1^2 - MG_3^2$ este constantă, deci M aparţine unei drepte b care este perpendiculară pe G_1G_3.

Deoarece punctele G_1, G_2, G_3 nu sunt coliniare, deducem că dreptele a şi b au un punct comun şi acesta este unic, ceea ce încheie soluţia problemei.