Problema 1. Fie M o mulţime de numere reale cu proprietăţile:
(i) $1 \in M$;
(ii) Dacă $\sqrt[3]{x} \in M$, atunci $1 + x \in M$;
(iii) Dacă $x \in M$, $x \geqslant 0$, atunci $\sqrt{x} \in M$.
Demonstraţi că $1 + 3\sqrt{3} \in M$ şi $1 + 56\sqrt{7} \in M$.

Lucian Dragomir

Soluţie. Din (i), avem $1 = \sqrt[3]{1} \in M$ şi din (ii) rezultă că $2 \in M$. Cum $2 = \sqrt[3]{8} \in M$, din (ii) deducem că $9 \in M$ şi din (iii) obţinem că $\sqrt{9} = 3 \in M$, deci $\sqrt{3} \in M$. Dar $\sqrt{3} = \sqrt[3]{3\sqrt{3}} \in M$, deci din (ii) rezultă că $1 + \sqrt{3} \in M$. Deoarece $3 = \sqrt[3]{27} \in M$, din (ii) deducem că $28 \in M$. Folosind (iii), obţinem că $2\sqrt{7} \in M$. Dar $2\sqrt{7} = \sqrt[3]{56\sqrt{7}} \in M$, deci din (ii) obţinem că $1+56\sqrt{7} \in M$.