Problema 2. Fie $n \geq 3$ un număr întreg. Demonstraţi că este posibil ca, eliminând cel mult două dintre elementele mulţimii $\{1, 2, \ldots, n\}$, să obţinem o mulţime care are suma elementelor pătrat perfect.

Mihail Bălună, Concursul ,,Al. Myller", 2002

Soluţie:
Suma a două numere (distincte) din mulţimea $\{1, 2, \ldots, n\}$ este cel puţin $1+2=3$ şi cel mult $(n-1)+n = 2n-1$. Ea poate lua orice valoare cuprinsă între acestea două. Într-adevăr, putem mereu mări cu 1 unul din cele două numere pentru a obţine o sumă cu 1 mai mare.
Presupunând că oricum am elimina două dintre elementele mulţimii nu obţinem pătrat perfect, ar rezulta că niciunul din numerele $\frac{n(n+1)}{2} - 3$, $\frac{n(n+1)}{2} - 4, \ldots,$ $\frac{n(n+1)}{2} - (2n-1)$ nu este pătrat perfect. Atunci toate aceste numere trebuie să fie cuprinse între două pătrate perfecte consecutive, k^2 şi $(k+1)^2$. (Dacă k^2 este cel mai mare pătrat perfect mai mic decât $\frac{n(n+1)}{2} - (2n-1)$, atunci toate numerele de mai sus trebuie să fie mai mici decât $(k+1)^2$.)
În acest caz, $k^2 < \frac{n(n+1)}{2} - (2n-1) < \frac{n(n+1)}{2} - 3 < (k+1)^2$ implică $k^2 + 1 \leq \frac{n(n+1)}{2} - (2n-1) < \frac{n(n+1)}{2} - 3 \leq k^2 + 2k$, deci $\frac{n(n+1)}{2} - 3 - \frac{n(n+1)}{2} + (2n-1) \leq (k^2+2k) - (k^2+1)$, adică $2n - 4 \leq 2k - 1$. Rezultă că $n \leq k+1$. Dar inegalitatea $k^2 < \frac{n(n+1)}{2} - (2n-1)$ implică atunci $(n-1)^2 < \frac{n(n+1)}{2} - (2n-1)$, adică $2n^2 < n^2 + n$, ceea ce este o contradicţie. Aşadar, presupunerea iniţială se dovedeşte a fi falsă, adică putem întotdeauna elimina două dintre elementele mulţimii $\{1, 2, \ldots, n\}$ astfel încât suma elementelor rămase să fie un pătrat perfect.